Алгебра

Істер О. С.

«Алгебра»

підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Шановні семикласники!

Ви починаєте вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін – алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках. Він складається з трьох розділів, які містять 30 параграфів. Під час вивчення теоретичного матеріалу зверніть увагу на текст, надрукований **жирним** шрифтом. Його треба запам’ятати.

У підручнику використано такі умовні позначення:

– треба запам’ятати;

– запитання і завдання до вивченого матеріалу;

– вправи для повторення;

117 – завдання для класної роботи;

225 – завдання для домашньої роботи;

– вправи підвищеної складності;

– рубрика «Цікаві задачі для учнів неледачих».

Усі вправи розподілено відповідно до рівнів навчальних досягнень і виокремлено так:

з позначки 1 починаються вправи початкового рівня;

з позначки 2 починаються вправи середнього рівня;

з позначки 3 починаються вправи достатнього рівня;

з позначки 4 починаються вправи високого рівня.

Перевірити свої знання та підготуватися до тематичного оцінювання можна, виконуючи завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Після кожного розділу наведено вправи для його повторення, а в кінці підручника – «Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу». «Задачі підвищеної складності» допоможуть підготуватися до математичної олімпіади та поглибити знання з математики. Пригадати раніше вивчені теми допоможуть «Відомості з курсу математики 5–6 класів».

Теоретичний матеріал підручника викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після вивчення теоретичного матеріалу в школі його обов’язково потрібно опрацювати вдома.

Підручник містить велику кількість вправ. Більшість з них ви розглянете на уроках та під час домашньої роботи; інші вправи рекомендується розв’язати самостійно.

Бажаємо успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Пропонований підручник містить велику кількість вправ; вправи більшості параграфів подано «із запасом». Тож обирайте їх для використання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації навчання тощо. Вправи, що не розглядалися на уроці, можна використати на додаткових, факультативних та індивідуальних заняттях.

Додаткові вправи у «Завданнях для перевірки знань» призначено для учнів, які впоралися з основними завданнями раніше за інших учнів. Правильне їх розв'язання вчитель може оцінити окремо.

Вправи для повторення розділів можна запропонувати учням, наприклад, під час узагальнюючих уроків або під час повторення і систематизації навчального матеріалу в кінці навчального року.

«Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника, допоможуть підготувати учнів до різноманітних математичних змагань та підвищити їхню цікавість до математики.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, необхідно запропонувати їй самостійно опрацювати матеріал цих уроків за підручником удома. Спочатку дитина має прочитати теоретичний матеріал, який викладено простою, доступною мовою, проілюстровано значною кількістю прикладів. Після цього необхідно розв'язати вправи, що посильні, з розглянутого параграфа.

Упродовж опрацювання дитиною курсу алгебри 7 класу ви можете пропонувати їй додатково розв'язувати вдома вправи, що не розглядалися під час уроку. Це сприятиме якнайкращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині розв'язати завдання «Домашньої самостійної роботи», які подано в тестовій формі, та «Завдання для перевірки знань». Це допоможе пригадати основні типи вправ та якісно підготуватися до тематичного оцінювання.

Якщо ваша дитина виявляє підвищену цікавість до математики та бажає поглибити свої знання, зверніть увагу на «Задачі підвищеної складності», які розміщено в кінці підручника.

Розділ 1.
Цілі вирази

У цьому розділі ви:

- **пригадаєте**, що таке числові і буквені вирази, вирази зі степенями, значення виразу;
- **ознайомитеся** з поняттями одночлена і многочлена, тотожності, тотожно рівних виразів;
- **навчитеся** виконувати арифметичні дії з одночленами і многочленами, тотожні перетворення виразів, застосовувати формули скороченого множення і властивості степенів, розкладати многочлени на множники.

§ 1. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ЧИСЛОВЕ ЗНАЧЕННЯ ВИРАЗУ

Числові вирази утворюють із чисел за допомогою знаків дій і дужок. Наприклад, числовими виразами є:

$$12 \cdot 3 - 9;\ \ 1{,}2^3;\ \ 5\frac{1}{7} - \left(5{,}7 : 3 + 1\frac{7}{9}\right) \text{ тощо.}$$

Число, що є результатом виконання всіх дій у числовому виразі, називають ***значенням виразу***.

Оскільки $12 \cdot 3 - 9 = 36 - 9 = 27$, то число 27 є значенням числового виразу $12 \cdot 3 - 9$.

Якщо числовий вираз містить дію, яку неможливо виконати, то кажуть, що вираз не має смислу (змісту). Наприклад, вираз $5 : (8 : 2 - 4)$ не має смислу, бо $8 : 2 - 4 = 0$ і наступну дію $5 : 0$ виконати неможливо.

Окрім числових виразів у математиці зустрічаються вирази, що містять букви. Такі вирази ми називали буквеними.

Приклад 1. Нехай необхідно знайти площу прямокутника, довжина якого дорівнює 10 см, а ширина – b см.

За формулою площі прямокутника маємо: $S = 10b$. Якщо, наприклад, $b = 3$, то $S = 30$, а якщо $b = 7$, то $S = 70$. У виразі $10b$ буква b може набувати різних значень, тобто її значення можна змінювати. При цьому буде змінюватися і значення виразу $10b$. Оскільки значення b може змінюватися (набувати різних, у даному випадку додатних значень), то букву b в такому виразі називають *змінною*, а сам вираз $10b$ – *виразом зі змінною*.

Наприклад, вирази $5 + a$; $2(b - 3x)$; $\dfrac{c-5p}{d}$ є ***виразами зі змінними.***

Вирази зі змінними утворюють із чисел та змінних за допомогою знаків арифметичних дій і дужок.

Якщо у вираз зі змінними замість змінних підставимо певні числа, то одержимо числовий вираз. Його значення називають ***числовим значенням виразу*** для вибраних значень змінних.

Приклад 2. Знайти значення виразу:

1) $(5 + b) : 4$, якщо $b = 0; -2$; 2) $\dfrac{a-c}{12}$, якщо $a = 17$, $c = -5$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Якщо $b = 0$, то $(5 + b) : 4 = (5 + 0) : 4 = 1{,}25$; якщо $b = -2$, то $(5 + b) : 4 = (5 + (-2)) : 4 = 0{,}75$.

2) Якщо $a = 17$, $c = -5$, то $\dfrac{a-c}{12} = \dfrac{17-(-5)}{12} = \dfrac{22}{12} = 1\dfrac{5}{6}$.

Вираз, який складається із чисел і змінних, сполучених знаками дій та дужок, називають ***раціональним виразом.*** Наприклад, раціональними є вирази:

$$2a - m;\quad \frac{p+2q}{9};\quad -\frac{2}{3}(x-9+y);\quad \frac{5+x}{m};\quad \frac{17}{x^2-3};\quad a+b-\frac{1}{c}.$$

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз зі змінною, називають ***цілим раціональним виразом.*** Якщо в раціональному виразі є ділення на вираз зі змінною, його називають ***дробовим раціональним виразом.*** Три перших з поданих вище виразів – цілі, а три останніх – дробові.

Вирази зі змінними використовують для запису формул.

Наприклад, $s = vt$ – формула відстані; $P = 2(a + b)$ – формула периметра прямокутника; $n = 2k$ (де k – ціле число) – формула парного числа; $n = 2k + 1$ (де k – ціле число) – формула непарного числа; $n = 7k$ (де k – ціле число) – формула числа, кратного числу 7.

А ще раніше...

Поява букв і знаків арифметичних дій у математичних записах є результатом розвитку математичної науки. У своїх працях шукане невідоме число стародавні єгипетські вчені називали «хау» (у перекладі – «купа»), а знаки математичних дій взагалі не вживали, записуючи усе переважно словами. І хоча потреба у використанні знаків математичних дій виникла ще у Стародавньому Єгипті, з'явилися вони набагато пізніше. Замість знаків додавання і віднімання стародавні математики використовували малюнки або слова, що призводило до громіздких записів.

Знаки арифметичних дій стали зустрічатися в наукових працях математиків, починаючи з XV ст. На сьогодні відомо, ким і коли було запропоновано деякі математичні знаки для записів. Так, знаки «+» і «–» зустрічаються вперше у 1489 році в праці «Арифметика» Йогана Відмана, професора Лейпцизького університету. Знак «×» для позначення дії множення введено англійським математиком Вільямом Оутредом у 1631 році. Для позначення дії ділення він використовував риску «/». Дробову риску в математичних записах (для відокремлення чисельника дробу від його знаменника) уже в 1202 році використовував Леонардо Пізанський, відомий математик середньовічної Європи. Німецький математик, фізик і філософ Готфрід Вільгельм Лейбніц (1646–1716) запропонував використовувати у якості знака множення крапку («·»), а у якості знака ділення – двокрапку («:»). Це відбулося у 1693 році та у 1684 році відповідно. Знак рівності («=») було введено в 1557 році Робертом Рекордом, математиком, який народився в Уельсі і довгий час був особистим лікарем королівської сім'ї Великої Британії.

Величезний внесок у розвиток алгебраїчної символіки зробив у XVI ст. видатний французький математик Франсуа Вієт, якого називають «батьком» алгебри. Саме він став позначати буквами не тільки змінні, а й будь-які числа, зокрема коефіцієнти при змінних. Проте його символіка відрізнялася від сучасної. Замість x, x^2 і x^3 Вієт писав відповідно букви N (*Numerus* – число), Q (*Quadratus* – квадрат) і C (*Cubus* – куб). Наприклад, рівняння $x^3 + 7x^2 - 8x = 20$ він записував так:
$1C + 7Q - 8N$ *aequ* 20 (*aequali* – дорівнює).

Франсуа Вієт
(1540–1603)

Із чого утворюють числові вирази? • Що називають значенням числового виразу? • Із чого утворюють вирази зі змінними? • Що називають числовим значенням виразу для вибраних значень змінних? • Наведіть приклад числового виразу і виразу зі змінними. • Який вираз називають цілим раціональним виразом?

1. (*Усно*) Які з наведених нижче виразів є числовими, а які – виразами зі змінними:

1) $5 + m^2 - a$; 2) $(12 - 3) : 4$;

3) $\dfrac{5+x}{a+b}$; 4) $(0 - 8) \cdot 5 - 13$?

2. (*Усно*) Які з раціональних виразів є цілими, а які – дробовими:

1) $\frac{a^3+c}{5}$; 2) $\frac{5}{a^3+c}$; 3) $m+\frac{x}{7}$; 4) $m+\frac{7}{x}$?

3. Випишіть окремо: числові вирази; вирази зі змінними; цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази:

1) $5 + c$; 2) $(2 - 15) \cdot 4$; 3) $\frac{a+m}{p}$; 4) $q^2 - 19$;

5) $7+\frac{a}{5}$; 6) $\frac{1}{4}ab$; 7) $\frac{9-5}{11}$; 8) $\frac{a^2-b^2}{c^2}$.

4. Прочитайте словами вирази зі змінними:

1) $x + 7$; 2) $m - a$; 3) $5ab$; 4) $5 : (c + 9)$.

5. Складіть і запишіть по два вирази:

1) зі змінною a; 2) зі змінними x і y.

6. Складіть і запишіть по три вирази:

1) зі змінною x; 2) зі змінними a і b.

7. (*Усно*) Які з даних числових виразів не мають смислу:

1) $(5 - 6) : 7$; 2) $(10 - 2 \cdot 5) : 7$;

3) $4 : (12 - 2 \cdot 6)$; 4) $\frac{17}{15+5\cdot(-3)}$?

2 **8.** Знайдіть значення виразу:

1) $5x - 3$, якщо $x = 1{,}8$; $x = 2\frac{1}{5}$;

2) $a^2 + 3a$, якщо $a = -1$; $a = 0{,}8$.

9. Знайдіть значення виразу:

1) $5m + 2n$, якщо $m = -1{,}3$; $n = 2\frac{1}{2}$;

2) $a(2b - c)$, якщо $a = 1{,}5$; $b = 3{,}2$; $c = -1{,}4$.

10. Знайдіть значення виразу:

1) $b^2 - 4b$, якщо $b = -2$; $b = 0{,}5$;

2) $x^2 - y^2$, якщо $x = 5$; $y = -3$; якщо $x = 0{,}1$; $y = 0{,}2$.

11. Запишіть у вигляді виразу:

1) суму чисел b і c;
2) добуток чисел $5m$ і n^3;
3) квадрат суми чисел a і $9p$;
4) різницю квадратів чисел $3d$ і $7r$.

12. Запишіть у вигляді виразу:

1) різницю чисел p і 7; 2) частку чисел $a + c$ і d;
3) суму числа a і добутку чисел m і n.

13. Заповніть у зошиті наступні таблиці:

m	2	3	–1	0	–2
n	1	2	0	–5	–3
$2m - 3n$					

x	–1	0	1	2
$x^2 + 2$				
$x^2 + 2x$				

14. Дізнайтеся прізвище видатного українського кардіохірурга. Для цього знайдіть значення виразу в першій таблиці і перенесіть букви, що відповідають знайденим значенням, у другу таблицю.

x	–2	–1	0	1	2
$x^2 - 4x$					
Букви	*О*	*А*	*В*	*М*	*С*

5	–3	12	–4	12	0

15. Порівняйте суму $a + b$ з добутком ab, якщо:

1) $a = 0$, $b = -2$; 2) $a = -3$, $b = 2$.

16. Майстер за одну годину виготовляє x деталей, а його учень – y деталей. Скільки деталей вони виготовили разом, якщо майстер працював 8 год, а учень – 4 год?

17. (*Усно*) Нехай a дм – довжина прямокутника, b дм – його ширина. Що означають вирази:

1) ab; 2) $2(a + b)$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{b}$?

18. Ручка коштує x грн, олівець – y грн ($x > y$). Що означають вирази:

1) $x + y$; 2) $3x + 4y$; 3) $x - y$; 4) $\frac{x}{y}$?

19. Запишіть у вигляді виразу час, який учень щоденно проводить у школі, якщо у нього a уроків по 45 хв, b перерв по 15 хв і c перерв по 10 хв. Обчисліть значення цього виразу, якщо $a = 6$; $b = 2$; $c = 3$.

20. Коли Марійка витягла зі своєї скарбнички всі монети, то виявилося, що там було x монет номіналом 10 коп., y монет номіналом 25 коп. і z монет номіналом 50 коп. Обчисліть, яку суму коштів назбирала Марійка, якщо $x = 8$; $y = 5$; $z = 20$.

21. При якому значенні змінної a значення виразу $5a - 8$ дорівнює -13?

22. При якому значенні x значення виразів $3x - 4$ і $-2x + 7$ рівні між собою?

23. Складіть формулу цілого числа, яке:

1) кратне числу 9;
2) при діленні на 5 дає в остачі 1.

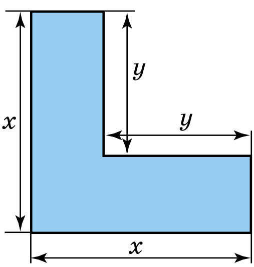
24. При деяких значеннях a і b значення виразу $a - b$ дорівнює 2,25. Якого значення при тих самих значеннях a і b набуває вираз:

1) $4(a - b)$; 2) $b - a$; 3) $\dfrac{1}{b-a}$; 4) $\dfrac{3(a-b)}{4(b-a)}$?

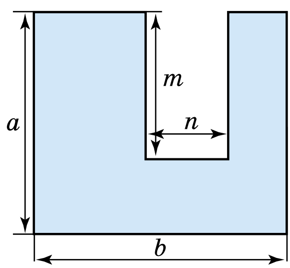
25. При деяких значеннях c і d значення виразу $c - d$ дорівнює $\dfrac{4}{7}$. Якого значення при тих самих значеннях c і d набуває вираз:

1) $7(c - d)$; 2) $d - c$; 3) $\dfrac{1}{d-c}$; 4) $\dfrac{5(d-c)}{4(c-d)}$?

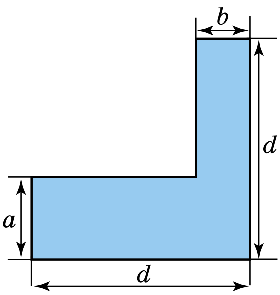
26. Складіть вирази для обчислення площ фігур (мал. 1–3):



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

Вправи для повторення

27. Обчисліть:

1) 13^2; 2) 7^3; 3) $(-2{,}1)^2$; 4) $(-1{,}1)^3$;

5) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$; 6) $\left(-1\dfrac{1}{5}\right)^2$; 7) $\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^3$; 8) $0{,}2^3$.

28. Якою цифрою закінчується значення виразу:

1) 132^2; 2) 271^3; 3) 2017^2; 4) $1315^2 - 115^3$?

29. Власна швидкість катера – 26 км/год, а швидкість течії річки – 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо в одному напрямі катер проходить її на 30 хв швидше, ніж у зворотному.

Цікаві задачі для учнів неледачих

30. Чи існує таке значення x, для якого:

1) $-x \geqslant |x|$; 2) $x > |x|$?

§ 2. ТОТОЖНІ ВИРАЗИ. ТОТОЖНІСТЬ. ТОТОЖНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ. ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Знайдемо значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для деяких даних значень змінної x. Результати запишемо в таблицю:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$2(x - 1)$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6
$2x - 2$	–10	–8	–6	–4	–2	0	2	4	6

Можна прийти до висновку, що значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ для кожного даного значення змінної x рівні між собою. За розподільною властивістю множення відносно віднімання $2(x - 1) = 2x - 2$. Тому й для будь-якого іншого значення змінної x значення виразів $2(x - 1)$ і $2x - 2$ теж будуть рівними між собою. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Два вирази, відповідні значення яких рівні між собою при будь-яких значеннях змінних, називають тотожними, або тотожно рівними.

Наприклад, тотожними є вирази $2x + 3x$ і $5x$, бо при кожному значенні змінної x ці вирази набувають однакових значень (це випливає з розподільної властивості множення відносно додавання, оскільки $2x + 3x = 5x$).

Розглянемо тепер вирази $3x + 2y$ і $5xy$. Якщо $x = 1$ і $y = 1$, то відповідні значення цих виразів рівні між собою:

$$3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5; \qquad 5xy = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Проте можна вказати такі значення x і y, для яких значення цих виразів не будуть між собою рівними. Наприклад, якщо $x = 2$; $y = 0$, то

$$3x + 2y = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6, \qquad 5xy = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

Отже, існують такі значення змінних, при яких відповідні значення виразів $3x + 2y$ і $5xy$ не дорівнюють одне одному. Тому вирази $3x + 2y$ і $5xy$ не є тотожно рівними.

Рівність, яка є правильною при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожністю*.

Виходячи з вищевикладеного, тотожностями, зокрема, є рівності: $2(x - 1) = 2x - 2$ та $2x + 3x = 5x$.

Тотожністю є кожна рівність, якою записано відомі властивості дій над числами. Наприклад,

$a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$; $a(b + c) = ab + ac$;
$ab = ba$; $(ab)c = a(bc)$; $a(b - c) = ab - ac$.

Тотожностями є і такі рівності:

$a + 0 = a$; $a \cdot 0 = 0$; $a \cdot (-b) = -ab$;
$a + (-a) = 0$; $a \cdot 1 = a$; $-a \cdot (-b) = ab$.

Тотожностями також прийнято вважати правильні числові рівності, наприклад:

$$1 + 2 + 3 = 6; \quad 5^2 + 12^2 = 13^2; \quad 12 \cdot (7 - 6) = 3 \cdot 4.$$

Якщо у виразі $5x + 2x - 9$ звести подібні доданки, одержимо, що $5x + 2x - 9 = 7x - 9$. У такому випадку кажуть, що вираз $5x + 2x - 9$ замінили тотожним йому виразом $7x - 9$.

Заміна одного виразу іншим, йому тотожним, називають *тотожним перетворенням виразу*.

Тотожні перетворення виразів зі змінними виконують, застосовуючи властивості дій над числами. Зокрема, тотожними перетвореннями є розкриття дужок, зведення подібних доданків тощо.

Тотожні перетворення доводиться виконувати під час *спрощення виразу*, тобто заміни деякого виразу на тотожно рівний йому вираз, який має коротший запис.

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $-0{,}3m \cdot 5n$;
2) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7)$;
3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $-0{,}3m \cdot 5n = -0{,}3 \cdot 5mn = -1{,}5mn$;

2) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7) = \underline{6x} - 8 - \underline{12x} + 21 = -6x + 13$;

3) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a) = 2 + \underline{5a} - \underline{a} + \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{3b}} - \underline{a} = 3a + 5b + 2.$

Щоб довести, що рівність є тотожністю (інакше кажучи, щоб *довести тотожність*), використовують тотожні перетворення виразів.

Довести тотожність можна одним з таких способів:

- виконати тотожні перетворення її лівої частини, тим самим звівши до вигляду правої частини;
- виконати тотожні перетворення її правої частини, тим самим звівши до вигляду лівої частини;
- виконати тотожні перетворення обох її частин, тим самим звівши обидві чистини до однакових виразів.

Приклад 2. Довести тотожність: 1) $2x - (x + 5) - 11 = x - 16$;
2) $20b - 4a = 5(2a - 3b) - 7(2a - 5b)$;
3) $2(3x - 8) + 4(5x - 7) = 13(2x - 5) + 21$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Перетворимо ліву частину даної рівності:

$$2x - (x + 5) - 11 = \underline{2x} - \underline{x} - 5 - 11 = x - 16.$$

Тотожними перетвореннями вираз у лівій частині рівності звели до вигляду правої частини і тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

2) Перетворимо праву частину даної рівності:

$$5(2a - 3b) - 7(2a - 5b) = \underline{10a} - \underline{\underline{15b}} - \underline{14a} + \underline{\underline{35b}} = 20b - 4a.$$

Тотожними перетвореннями праву частину рівності звели до вигляду лівої частини і тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

3) У цьому випадку зручно спростити як ліву, так і праву частини рівності та порівняти результати:

$$2(3x - 8) + 4(5x - 7) = \underline{6x} - 16 + \underline{20x} - 28 = 26x - 44;$$

$$13(2x - 5) + 21 = 26x - 65 + 21 = 26x - 44.$$

Тотожними перетвореннями ліву і праву частини рівності звели до одного й того самого вигляду: $26x - 44$. Тому дана рівність є тотожністю.

Які вирази називають тотожними? • Наведіть приклад тотожних виразів. • Яку рівність називають тотожністю? • Наведіть приклад тотожності. • Що називають тотожним перетворенням виразу? • Як довести тотожність?

31. (*Усно*) Чи є вирази тотожно рівними:

1) $2a + a$ і $3a$; 2) $7x + b$ і $b + 7x$; 3) $x + x + x$ і x^3;
4) $2(x - 2)$ і $2x - 4$; 5) $m - n$ і $n - m$; 6) $2a \cdot p$ і $2p \cdot a$?

32. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $7x - 2x$ і $5x$; 2) $5a - 4$ і $4 - 5a$; 3) $4m + n$ і $n + 4m$;
4) $a + a$ і a^2; 5) $3(a - 4)$ і $3a - 12$; 6) $5m \cdot n$ і $5m + n$?

33. (*Усно*) Чи є тотожністю рівність:

1) $2a + 10b = 12ab$; 2) $7p - 1 = -1 + 7p$; 3) $3(x - y) = 3x - 5y$?

34. Розкрийте дужки:

1) $2(a - 1)$; 2) $7(3b + 2)$; 3) $-(b - 3)$; 4) $-(-5 + 4y)$.

35. Розкрийте дужки:

1) $-(a - 4)$; 2) $3(x + 1)$; 3) $5(1 - 4m)$; 4) $-(-2p + 7)$.

36. Зведіть подібні доданки:

1) $2x - x$; 2) $-3m + 5m$; 3) $-2y - 3y$; 4) $p - 7p$.

37. Назвіть кілька виразів, тотожних виразу $2a + 3a$.

2 **38.** Спростіть вираз, використовуючи переставну і сполучну властивості множення:

1) $-2{,}5x \cdot 4$; 2) $4p \cdot (-1{,}5)$;
3) $0{,}2x \cdot (-0{,}3p)$; 4) $-\frac{1}{7}x \cdot (-7y)$.

39. Спростіть вираз:

1) $-2p \cdot 3{,}5$; 2) $7a \cdot (-1{,}2)$;
3) $0{,}2x \cdot (-3y)$; 4) $-1\frac{1}{3}m \cdot (-3n)$.

40. (*Усно*) Спростіть вираз:

1) $2x - 9 + 5x$; 2) $7a - 3b + 2a + 3b$;
3) $-2x \cdot 3$; 4) $-4a \cdot (-2b)$.

41. Зведіть подібні доданки:

1) $5b - 8a + 4b - a$;
2) $17 - 2p + 3p + 19$;
3) $1{,}8a + 1{,}9b + 2{,}8a - 2{,}9b$;
4) $5 - 7c + 1{,}9p + 6{,}9c - 1{,}7p$.

42. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $4(5x - 7) + 3x + 13$;
2) $2(7 - 9a) - (4 - 18a)$;
3) $3(2p - 7) - 2(p - 3)$;
4) $-(3m - 5) + 2(3m - 7)$.

43. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $3(8a - 4) + 6a$;
2) $7p - 2(3p - 1)$;
3) $2(3x - 8) - 5(2x + 7)$;
4) $3(5m - 7) - (15m - 2)$.

44. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}6x + 0{,}4(x - 20)$, якщо $x = 2{,}4$;
2) $1{,}3(2a - 1) - 16{,}4$, якщо $a = 10$;
3) $1{,}2(m - 5) - 1{,}8(10 - m)$, якщо $m = -3{,}7$;
4) $2x - 3(x + y) + 4y$, якщо $x = -1$, $y = 1$.

45. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}7x + 0{,}3(x - 4)$, якщо $x = -0{,}7$;
2) $1{,}7(y - 11) - 16{,}3$, якщо $y = 20$;
3) $0{,}6(2a - 14) - 0{,}4(5a - 1)$, якщо $a = -1$;
4) $5(m - n) - 4m + 7n$, якщо $m = 1{,}8$; $n = -0{,}9$.

46. Доведіть тотожність:

1) $-(2x - y) = y - 2x$;
2) $2(x - 1) - 2x = -2$;
3) $2(x - 3) + 3(x + 2) = 5x$;
4) $c - 2 = 5(c + 2) - 4(c + 3)$.

47. Доведіть тотожність:

1) $-(m - 3n) = 3n - m$;
2) $7(2 - p) + 7p = 14$;
3) $5a = 3(a - 4) + 2(a + 6)$;
4) $4(m - 3) + 3(m + 3) = 7m - 3$.

48. Довжина однієї зі сторін трикутника a см, а довжина кожної з двох інших сторін на 2 см більша за неї. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника і спростіть цей вираз.

49. Ширина прямокутника дорівнює x см, а довжина на 3 см більша за ширину. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника і спростіть цей вираз.

3 **50.** Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $x - (x - (2x - 3))$;
2) $5m - ((n - m) + 3n)$;
3) $4p - (3p - (2p - (p + 1)))$;
4) $5x - (2x - ((y - x) - 2y))$;
5) $\frac{2}{3}\left(6a - \frac{3}{8}b\right) - \frac{2}{11}\left(4\frac{1}{8}a - 33b\right)$;
6) $-\frac{2}{9}(2{,}7m - 1{,}5n) + \frac{5}{6}(2n - 0{,}48m)$.

51. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $a - (a - (3a - 1))$;
2) $12m - ((a - m) + 12a)$;
3) $5y - (6y - (7y - (8y - 1)))$;
4) $\frac{4}{7}(2{,}1a - 2{,}8b) - \frac{4}{5}\left(1\frac{1}{2}a - 1\frac{1}{4}b\right)$.

52. Доведіть тотожність:

1) $10x - (-(5x + 20)) = 5(3x + 4)$;
2) $-(-3p) - (-(8 - 5p)) = 2(4 - p)$;
3) $3(a - b - c) + 5(a - b) + 3c = 8(a - b)$.

53. Доведіть тотожність:

1) $12a - (-(8a - 16)) = -4(4 - 5a)$;
2) $4(x + y - t) + 5(x - t) - 4y = 9(x - t)$.

54. Доведіть, що значення виразу

$$1{,}8(m - 2) + 1{,}4(2 - m) + 0{,}2(1{,}7 - 2m)$$

не залежить від значення змінної.

55. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної значення виразу

$$a - (a - (5a + 2)) - 5(a - 8)$$

є одним і тим самим числом.

56. Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.

57. Доведіть, що якщо n – натуральне число, то значення виразу $-2(2{,}5n - 7) + 2\frac{1}{3}(3n - 6)$ є парним числом.

Вправи для повторення

58. Сплав масою 1,6 кг містить 15 % міді. Скільки кг міді міститься у цьому сплаві?

59. Скільки відсотків складає число 20 від свого:

1) квадрата; 2) куба?

60. Турист 2 год ішов пішки і 3 год їхав на велосипеді. Усього турист подолав 56 км. Знайдіть, з якою швидкістю турист їхав на велосипеді, якщо вона на 12 км/год більша за швидкість, з якою він ішов пішки.

Цікаві задачі для учнів неледачих

61. У чемпіонаті міста з футболу беруть участь 11 команд. Кожна команда грає з іншими по одному матчу. Доведіть, що в будь-який момент змагань знайдеться команда, яка проведе до цього моменту парну кількість матчів або не провела ще жодного.

§ 3. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Нагадаємо, що добуток кількох однакових множників можна записати у вигляді виразу, який називають ***степенем.***

Наприклад,

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{6\ \text{множників}} = 4^6.$$

Множник, який повторюється, називають ***основою степеня***, а число, яке показує кількість таких множників, – ***показником степеня.*** У виразі 4^6 число 4 – основа степеня, а число 6 – показник степеня. Оскільки $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$, то кажуть, що число 4096 є шостим степенем числа 4.

Степенем числа a з натуральним показником n **($n > 1$) називають добуток *n* множників, кожний з яких дорівнює *a*.** ***Степенем числа a з показником*** **1 називають саме число *a*.**

Степінь з основою a і показником n записують так: a^n, читають: «a в степені n» або «n-й степінь числа a».

За означенням степеня: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множників}}$, $n > 1$ і $a^1 = a$.

Нам уже відомо, що другий степінь числа a називають ***квадратом числа a***, а третій степінь числа a називають ***кубом числа a.***

Приклад 1. Подати у вигляді степеня: 1) aa; 2) $bbbb$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $aa = a^2$; 2) $bbbb = b^4$; 3) $17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3$; 4) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.

Обчислення значення степеня є арифметичною дією, яку називають ***піднесенням до степеня.***

Приклад 2. Виконати піднесення до степеня:

1) 2^4; 2) 0^3; 3) $(-6)^2$; 4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$;

2) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;

3) $(-6)^2 = -6 \cdot (-6) = 36$;

4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$.

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником n.

1) Якщо $a = 0$, то $0^1 = 0$; $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$; ... .

Отже, $0^n = 0$.

2) Якщо $a > 0$, то $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}} > 0$ як добуток додатних чисел.

Отже, $a^n > 0$ для будь-якого $a > 0$.

3) Якщо $a < 0$, при непарному значенні n маємо: $a^n < 0$ як добуток непарної кількості від'ємних множників; при парному значенні n маємо: $a^n > 0$ як добуток парної кількості від'ємних множників.

Отже,

$a^n < 0$ для будь-якого $a < 0$ та непарного n;
$a^n > 0$ для будь-якого $a < 0$ та парного n.

Якщо вираз містить декілька дій, то в першу чергу виконують дію піднесення до степеня, потім дії множення і ділення, а потім – дії додавання і віднімання.

Приклад 3. Знайти значення виразу: 1) $3 - 7 \cdot 2^3$; 2) $(2 + (-3)^4)^2$; 3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8$; 4) $4^3 : 2^7$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $3 - 7 \cdot 2^3 = 3 - 7 \cdot 8 = 3 - 56 = -53$;

2) $(2 + (-3)^4)^2 = (2 + 81)^2 = 83^2 = 6889$;

3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8 = (-1 + 1)^8 = 0^8 = 0$;

4) $4^3 : 2^7 = 64 : 128 = 0{,}5$.

П р и м і т к а: під час обчислень можна також записувати кожну дію окремо.

А ще раніше...

Поняття степеня з натуральним показником сформувалося ще у стародавні часи. Квадрат числа використовували для обчислення площ, куб числа – для обчислення об’ємів. Степені деяких чисел у Стародавньому Єгипті та Вавилоні використовували під час розв’язування окремих задач.

Французький математик Ф. Вієт використовував букви N, Q і C не лише для записів відповідно x, x^2 і x^3, а й для запису степенів вище третього. Наприклад, четвертий степінь він записував так: QQ.

Сучасний запис степенів був запропонований видатним французьким математиком, фізиком, філософом Рене Декартом. У своїй праці «Геометрія» (1634) він почав записувати степені з натуральним показником так, як ми це робимо зараз: c^3, c^4, c^5 і т. д. Проте c^2 він записував як добуток: cc.

Рене Декарт
(**1596–1650**)

Сформулюйте означення степеня з натуральним показником. • Наведіть приклади степенів та назвіть їх основу та показник. • Як називають другий степінь числа; третій степінь числа? • Яким числом (додатним чи від’ємним) є степінь додатного числа; степінь від’ємного числа з парним показником; степінь від’ємного числа з непарним показником? • У якому порядку виконують арифметичні дії у числових виразах, що містять степені?

62. Прочитайте вирази, назвіть основу і показник степеня:

1) $0{,}4^7$; 2) $(-8)^2$; 3) $(ab)^3$;

4) $(x-y)^5$; 5) $\left(\frac{1}{2}a^2m\right)^4$; 6) $(a^2-b^2)^6$.

63. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}2 \cdot 0{,}2$; 2) $-6 \cdot (-6) \cdot (-6)$;

3) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$; 4) $-\frac{5}{9} \cdot \left(-\frac{5}{9}\right)$;

5) $mmmm$; 6) $(ab) \cdot (ab)$;

7) $\underbrace{p \cdot p \cdot \ldots \cdot p}_{20\ \text{множників}}$; 8) $(x-y)(x-y)(x-y)$.

64. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$; 2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; 3) $aaaaa$;

4) $(a + b)(a + b)$; 5) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$; 6) $\underbrace{mmm...m}_{15 \text{ множників}}$.

65. Запишіть степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 3^5; 2) a^3; 3) $(a - b)^2$; 4) $\left(\frac{x}{x+y}\right)^4$.

66. Подайте степінь у вигляді добутку однакових множників:

1) 5^7; 2) b^4; 3) $(x + y)^3$; 4) $\left(\frac{m}{m-5}\right)^2$.

67. (*Усно*) Обчисліть:

1) 1^3; 2) 0^5; 3) 5^2; 4) $(-7)^2$; 5) $(-2)^3$; 6) $(-1)^8$.

68. Знайдіть значення виразу:

1) 3^2; 2) 2^3; 3) 0^2; 4) 1^7; 5) $(-1)^4$; 6) $(-1)^3$.

2 **69.** Виконайте піднесення до степеня:

1) 3^5; 2) $(0,7)^2$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $(-7)^4$; 6) $(-0,3)^3$; 7) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$; 8) $(-0,1)^4$.

70. Виконайте піднесення до степеня:

1) 5^4; 2) $(1,5)^2$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$;

5) $(-3)^3$; 6) $(-1,7)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^3$; 8) $(-0,2)^4$.

71. Заповніть таблицю у зошиті:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

72. Розкладіть натуральні числа на прості множники, використавши у запису степінь:

1) 16; 2) 27; 3) 50; 4) 1000; 5) 99; 6) 656.

73. Знайдіть значення виразу:

1) -5^2; 2) $-\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3$; 3) $-(-0{,}2)^4$; 4) $-(-1)^{19}$.

74. Обчисліть:

1) -7^3; 2) $-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$; 3) $-\left(-1\dfrac{1}{3}\right)^3$; 4) $-(-1)^{16}$.

75. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-5{,}7)^2$; 2) $(-12{,}49)^9$; 3) -53^7; 4) $-(-2)^5$.

76. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-4{,}7)^3$; 2) $(-2{,}31)^4$; 3) $-(-2)^8$; 4) $-(-3)^7$.

77. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}2 \cdot 25^2$; 2) $\dfrac{50}{0{,}1^3}$; 3) $-4 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^4$; 4) $0{,}2 \cdot (-5)^3$;

5) $\left(5 \cdot \dfrac{2}{15}\right)^3$; 6) $\left(6 : \dfrac{2}{3}\right)^2$; 7) $5^2 + (-5)^4$; 8) $(3{,}4 - 3{,}6)^2$.

78. Обчисліть:

1) $0{,}5 \cdot 40^2$; 2) $\dfrac{30}{0{,}3^3}$; 3) $-5 \cdot \left(\dfrac{1}{5}\right)^3$; 4) $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^2 \cdot 16$;

5) $\left(12 : \dfrac{6}{7}\right)^2$; 6) $\left(-3 \cdot \dfrac{2}{9}\right)^4$; 7) $6^2 - (-6)^3$; 8) $(1{,}7 - 1{,}9)^4$.

79. Чи є правильними рівності:

1) $3^2 + 4^2 = 5^2$; 2) $4^2 + 5^2 = 6^2$;

3) $2^3 + 3^3 = 5^3$; 4) $2^6 + 6^2 = 10^2$;

5) $1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2$; 6) $(-5)^2 + (-12)^2 = (-13)^2$?

80. Подайте:

1) 0; 4; $0{,}16$; $\dfrac{9}{25}$; 169; $1\dfrac{24}{25}$ у вигляді квадрата числа;

2) 64; -27; 0; 1; $-\dfrac{1}{8}$; $1\dfrac{91}{125}$ у вигляді куба числа.

81. Подайте числа:

1) 5; 125; 625 у вигляді степеня з основою 5;

2) 100; 10 000; 10 у вигляді степеня з основою 10.

82. Подайте:

1) $8;\ 81;\ -125;\ -64;\ 0{,}16;\ 0{,}001;\ 3\frac{3}{8};\ 1\frac{11}{25}$ у вигляді квадрата або куба числа;

2) 2; 4; 8; 256 у вигляді степеня з основою 2;

3) 81; –27; –3 у вигляді степеня з основою –3.

83. Обчисліть:

1) суму квадратів чисел 0,6 і –0,7;
2) квадрат суми чисел 5,7 і –6,3;
3) різницю кубів чисел 2,3 і 2,2;
4) куб суми чисел 8,2 і 1,8.

84. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{1}{27}x^3$, якщо $x = 0;\ -1;\ 1;\ -3;\ 3$;

2) $a + a^2 + a^3$, якщо $a = 1;\ -1;\ -2$;

3) $(15x)^4$, якщо $x = \frac{1}{3};\ -\frac{1}{5}$;

4) $a^2 - b^2$, якщо $a = -6;\ b = -8$.

85. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}01a^4$, якщо $a = 2;\ -5;\ 10$;
2) $5c^2 - 4$, якщо $c = 0{,}2;\ -0{,}1;\ 0$;
3) $(m + n)^3$, якщо $m = -4,\ n = -1$;
4) $4x^2 - x^3$, якщо $x = 1;\ -2;\ -3$.

86. Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) -2^4 і $(-2)^4$;　　2) $(-7)^3$ і $(-6)^2$;
3) $(-12)^8$ і 12^8;　　4) -5^3 і $(-5)^3$.

87. Порівняйте значення виразів:

1) $-x^2$ і $(-x)^2$, якщо $x = 5;\ -3;\ 0$;
2) $-x^3$ і $(-x)^3$, якщо $x = -2;\ 0;\ 3$.

88. Замініть зірочку знаком $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ так, щоб одержана нерівність була правильною при будь-яких значеннях змінних:

1) $a^2 * 0$;　　2) $-b^2 * 0$;　　3) $m^2 + 3 * 0$;
4) $-p^2 - 1 * 0$;　　5) $(a - 3)^2 * 0$;　　6) $a^2 + b^2 * 0$;
7) $x^2 + y^2 + 5 * 0$;　　8) $(m - n)^2 + 1 * 0$;　　9) $-(p + 9)^2 * 0$.

89. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $a^2 + 1$; 2) $3 + (m - 3)^2$; 3) $(a + 8)^4 - 5$?

90. Якого найбільшого значення може набувати вираз:

1) $-x^2 + 2$; 2) $-(m - 2)^4 + 1$; 3) $5 - (a + 9)^2$?

Вправи для повторення

91. Запишіть дріб у вигляді відсотків:

1) 0,8; 2) 1,13; 3) 8,3; 4) 0,007.

92. Обчисліть:

1) $\left(9\frac{8}{15} - 7\frac{7}{15}\right) \cdot 4{,}5 - 2\frac{1}{6} : 0{,}52$;

2) $\frac{8}{13} \cdot (-0{,}1625) - \left(\frac{9}{22} + 1\frac{4}{11}\right) \cdot 1{,}32$.

93. При деяких натуральних значеннях x і y значення виразу $x + 3y$ ділиться на 5. Чи ділиться на 5 значення виразу $7x + 21y$ при тих самих значеннях x і y?

Цікаві задачі для учнів неледачих

94. Доведіть *ознаку подільності на 4*: натуральне число ділиться на 4 тоді і тільки тоді, коли число, записане його двома останніми цифрами, ділиться на 4.

§ 4. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Розглянемо властивості степеня з натуральним показником.

Вираз a^3a^2 є добутком двох степенів з однаковими основами. Застосувавши означення степеня, цей добуток можна переписати так:

$$a^3a^2 = (aaa) \cdot (aa) = aaaaa = a^5.$$

Отже, $a^3a^2 = a^5$, тобто $a^5 = a^{2+3}$. У той самий спосіб неважко перевірити, що $x^5x^4x^2 = x^{5+4+2} = x^{11}$. Тому *добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює сумі показників множників.* Ця властивість справджується для кожного добутку степенів з однаковими основами.

Для будь-якого числа а й довільних натуральних чисел m і n виконується рівність $a^m a^n = a^{m+n}$.

Д о в е д е н н я. $a^m a^n = \underbrace{aa \ldots a}_{\substack{m \\ \text{множників}}} \cdot \underbrace{aa \ldots a}_{\substack{n \\ \text{множників}}} = \underbrace{aaa \ldots a}_{\substack{(m+n) \\ \text{множників}}} = a^{m+n}$.

Рівність $a^m a^n = a^{m+n}$ називають ***основною властивістю степеня.*** Вона поширюється на добуток трьох і більше степенів. Наприклад:

$$a^m a^n a^k = a^{m+n+k}.$$

З основної властивості степеня випливає *правило множення степенів* з однаковими основами:

При множенні степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а показники степенів додають.

Наприклад, $3^7 \cdot 3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$; $7^3 \cdot 7 = 7^3 \cdot 7^1 = 7^{3+1} = 7^4$; $a^7 a^2 a^3 = a^{7+2+3} = a^{12}$.

Оскільки $a^3 a^2 = a^5$, то за означенням частки $a^5 : a^3 = a^2$, тобто $a^2 = a^{5-3}$. У той самий спосіб неважко пересвідчитися, що $x^{15} : x^4 = x^{11}$. Тому *частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює різниці показників діленого і дільника*. Ця властивість справджується для кожної частки степенів з однаковими, відмінними від нуля, основами за умови, що показник степеня діленого більший за показник степеня дільника.

Для будь-якого числа $a \neq 0$ і довільних натуральних чисел m і n, таких, що m > n, виконується рівність:

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} a^n = a^m$, то за означенням частки маємо $a^m : a^n = a^{m-n}$.

З доведеної властивості випливає *правило ділення степенів*.

При діленні степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Наприклад, $3^{18} : 3^5 = 3^{18-5} = 3^{13}$; $m^9 : m = m^9 : m^1 = m^{9-1} = m^8$.

Вираз $(a^7)^3$ – степінь, основа якого є степенем. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$(a^7)^3 = a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7} = a^{7\cdot 3} = a^{21}.$$

У той самий спосіб можна пересвідчитися, що $((x^7)^3)^2 = x^{42}$. Тобто *степінь при піднесенні до степеня дорівнює степеню з тією самою основою і показником, що дорівнює добутку показників даних степенів*.

Для будь-якого числа a і довільних натуральних чисел m і n виконується рівність:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Д о в е д е н н я. $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}$.

З доведеної властивості випливає *правило піднесення степеня до степеня*.

При піднесенні степеня до степеня основу залишають тією самою, а показники степенів перемножують.

Наприклад, $(4^5)^4 = 4^{5\cdot 4} = 4^{20}$; $(a^8)^{11} = a^{8\cdot 11} = a^{88}$; $((p^3)^2)^5 = (p^{3\cdot 2})^5 = (p^6)^5 = p^{6\cdot 5} = p^{30}$.

Вираз $(ab)^3$ є степенем добутку множників a і b. Цей вираз можна подати у вигляді добутку степенів a і b:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3b^3$.

Таку саму властивість при піднесенні до степеня має будь-який добуток.

Для будь-яких чисел a і b й довільного натурального числа n виконується рівність $(ab)^n = a^n b^n$.

Д о в е д е н н я.

$$(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{(aa\cdot\ldots\cdot a)}_{n \text{ множників}}\cdot\underbrace{(bb\cdot\ldots\cdot b)}_{n \text{ множників}} = a^n b^n.$$

Ця властивість степеня поширюється на степінь добутку трьох і більше множників. Наприклад,

$$(mpk)^n = m^n p^n k^n; \ (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n \text{ тощо.}$$

Маємо *правило піднесення добутку до степеня*.

При піднесенні добутку до степеня треба піднести до цього степеня кожний із множників і результати перемножити.

Наприклад,

$(7ab)^2 = 7^2a^2b^2 = 49a^2b^2; \quad (-2xy)^3 = (-2)^3x^3y^3 = -8x^3y^3.$

Ліву і праву частини розглянутих тотожностей можна міняти місцями:

$a^m a^n = a^{m+n}$,
$a^m : a^n = a^{m-n}$,
$(a^m)^n = a^{mn}$,
$(ab)^n = a^n b^n$,

і

$a^{m+n} = a^m a^n$,
$a^{m-n} = a^m : a^n$,
$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$,
$a^n b^n = (ab)^n$.

Розглянемо, як спростити вирази, що містять степені, та обчислити їх значення.

Приклад 1. Спростити $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6$.

Р о з в' я з а н н я. $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6 = a^6 \cdot (a^5)^6 = a^6a^{30} = a^{36}$.

Приклад 2. Обчислити: 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11}$; 2) $3^5 \cdot 9^2 : 27^2$; 3) $2^7 \cdot 0{,}5^8$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11} = 0{,}7^2 = 0{,}49$.

2) Подамо 9^2 і 27^2 у вигляді степеня з основою 3, тобто $9^2 = (3^2)^2$, $27^2 = (3^3)^2$. Отже, маємо:

$3^5 \cdot 9^2 : 27^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 : (3^3)^2 = 3^5 \cdot 3^4 : 3^6 = 3^9 : 3^6 = 3^3 = 27.$

3) Оскільки $0{,}5^8 = 0{,}5^7 \cdot 0{,}5$, маємо:

$2^7 \cdot 0{,}5^8 = 2^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5 = (2 \cdot 0{,}5)^7 \cdot 0{,}5 = 1^7 \cdot 0{,}5 = 1 \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$

Сформулюйте основну властивість степеня. ● Сформулюйте правила множення степенів, ділення степенів, піднесення степеня до степеня та піднесення добутку до степеня.

95. (*Усно*) Які з рівностей є правильними:

1) $a^6 \cdot a^2 = a^{12}$; 2) $a^7a^3 = a^{10}$;
3) $b^{10} : b^5 = b^2$; 4) $b^8 : b^2 = b^6$;
5) $(a^7)^3 = a^{21}$; 6) $(a^4)^5 = a^9$?

96. (*Усно*) Подайте добуток у вигляді степеня:

1) m^7m^4; 2) a^9a; 3) $10^7 10^5$; 4) $9 \cdot 9^5$.

97. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) a^4a^9; 2) c^3c^{10}; 3) y^5y; 4) $2^8 \cdot 2^{23}$.

98. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) m^3m^2; 2) p^9p^4; 3) $3 \cdot 3^{17}$; 4) a^5a^2.

99. (*Усно*) Представте частку у вигляді степеня:

1) $a^9 : a^2$; 2) $7^{15} : 7^{12}$; 3) $b^9 : b$; 4) $19^8 : 19^7$.

100. Запишіть частку у вигляді степеня:

1) $a^7 : a^4$; 2) $x^{10} : x^5$; 3) $c^7 : c$; 4) $p^9 : p^8$.

101. Подайте частку у вигляді степеня:

1) $p^9 : p^5$; 2) $x^{12} : x^3$; 3) $10^8 : 10$; 4) $t^{12} : t^{11}$.

102. (*Усно*) Запишіть у вигляді степеня:

1) $(c^7)^3$; 2) $(2^{10})^7$; 3) $(p^3)^5$; 4) $(7^8)^{11}$.

103. Подайте у вигляді степеня:

1) $(x^2)^4$; 2) $(a^7)^2$; 3) $(8^9)^3$; 4) $(10^3)^5$.

104. Подайте у вигляді степеня:

1) $(m^3)^4$; 2) $(p^9)^2$; 3) $(7^3)^{10}$; 4) $(19^2)^7$.

105. Запишіть вираз x^{12} у вигляді добутку двох степенів, один з яких дорівнює:

1) x^3; 2) x^6; 3) x^9; 4) x^{11}.

106. Запишіть степінь у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами:

1) m^7; 2) c^{12}; 3) 5^{17}; 4) p^8.

107. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $(-7)^3 \cdot (-7)^4 \cdot (-7)$; 2) aa^5a^{11}; 3) $bbbb^9$;
4) $(x - y)^3(x - y)^{12}$; 5) $14^7 \cdot 14^5 \cdot 14^9$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^4$.

108. Запишіть у вигляді степеня вираз:

1) $12^3 \cdot 12^9 \cdot 12$; 2) ppp^7p;

3) $(a+b)^3(a+b)^5$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6$.

109. Обчисліть значення виразу, використовуючи властивості степенів і таблицю степенів з основами 2 і 3 (див. вправу 71 на с. 20).

1) $2^3 \cdot 2^4$; 2) $3^6 : 3$; 3) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; 4) $2^9 : 2^3$.

110. Виконайте піднесення до степеня:

1) $(xy)^9$; 2) $(abc)^7$; 3) $(0{,}1a)^3$; 4) $(2xy)^4$;

5) $(-2a)^5$; 6) $(-0{,}3a)^2$; 7) $(-4ab)^3$; 8) $\left(-\frac{2}{3}axz\right)^4$.

111. Запишіть степінь у вигляді добутку степенів або числа і степенів:

1) $(ab)^5$; 2) $(2p)^4$; 3) $(-5ax)^3$;

4) $\left(-\frac{3}{4}ac\right)^4$; 5) $(-0{,}1m)^3$; 6) $(-0{,}07mx)^2$.

112. Знайдіть значення виразу:

1) $6^{18} : 6^{16}$; 2) $0{,}3^8 : 0{,}3^5$; 3) $\frac{4{,}92^{10}}{4{,}92^9}$;

4) $\frac{10^8}{10^5}$; 5) $\left(-\frac{1}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{1}{4}\right)^7$; 6) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(1\frac{1}{2}\right)^8$.

113. Обчисліть:

1) $9^{10} : 9^8$; 2) $\frac{0{,}4^{17}}{0{,}4^{14}}$; 3) $\left(-1\frac{1}{9}\right)^{15} : \left(-1\frac{1}{9}\right)^{13}$; 4) $\frac{\left(1\frac{1}{3}\right)^{12}}{\left(1\frac{1}{3}\right)^8}$.

114. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8^{12} \cdot 8^3}{8^{13}}$; 2) $\frac{4^8}{4 \cdot 4^6}$; 3) $\frac{(-3)^5 \cdot (-3)^7}{(-3)^{10}}$; 4) $\frac{(0{,}2)^7 \cdot (0{,}2)^5}{(0{,}2)^3 \cdot (0{,}2)^6}$.

115. Обчисліть:

1) $5^4 \cdot 5^{12} : 5^{13}$; 2) $\frac{37^{12}}{37^5 \cdot 37^6}$; 3) $\frac{6^{17} \cdot 6^8}{6^{22}}$; 4) $\frac{(0{,}7)^3 \cdot (0{,}7)^{16}}{(0{,}7)^{12} \cdot (0{,}7)^5}$.

116. Спростіть вираз, використовуючи правила множення і ділення степенів:

1) $a^7 \cdot a^9 : a^3$; 2) $b^9 : b^5 : b^3$; 3) $m^{12} : m^7 \cdot m$; 4) $p^{10} : p^9 \cdot p^3$.

117. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $(a^3)^4 \cdot a^8$; 2) $((a^7)^2)^3$; 3) $(b^3)^2 : b^4$; 4) $(a^4)^5 \cdot (a^7)^2$.

118. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) $(b^3)^4 \cdot b^7$; 2) $((x^4)^5)^6$; 3) $(c^3)^8 : c^{10}$; 4) $(m^3)^5 \cdot (m^2)^7$.

119. Запишіть у вигляді степеня з основою mn:

1) m^9n^9; 2) m^7n^7; 3) m^2n^2; 4) $m^{2015}n^{2015}$.

120. Подайте у вигляді степеня з основою ab:

1) a^5b^5; 2) a^3b^3; 3) $a^{18}b^{18}$; 4) $a^{2016}b^{2016}$.

З **121.** Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) a^4b^4; 2) $49a^2x^2$; 3) $0{,}001a^3b^3$; 4) $-8p^3$;

5) $-32a^5b^5$; 6) $-a^7b^7c^7$; 7) $\frac{1}{27}x^3y^3$; 8) $-\frac{64}{125}p^3q^3$.

122. Знайдіть таке значення x, при якому рівність є правильною:

1) $3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+x}$; 2) $2^7 \cdot 2^8 = 2^{1+x}$;

3) $4^x \cdot 4^5 = 4^8$; 4) $9^8 : 9^x = 9^5$.

123. Замініть зірочку степенем з основою a так, щоб рівність стала тотожністю:

1) $a^2 \cdot * = a^7$; 2) $a^8 \cdot * = a^9$; 3) $a^4 \cdot * \cdot a^7 = a^{19}$.

124. Замініть зірочку степенем з основою b ($b \neq 0$) так, щоб рівність стала тотожністю:

1) $b^7 : * = b^3$; 2) $* : b^5 = b^9$;

3) $b^9 : * \cdot b^3 = b^7$; 4) $* : b^9 \cdot b^4 = b^{10}$.

125. Знайдіть таке значення x, при якому є правильною рівність:

1) $1{,}8^9 : 1{,}8 = 1{,}8^{9-x}$; 2) $19^x : 19^7 = 19^9$; 3) $4^{12} : 4^x = 4^7$.

126. Подайте вираз:

1) 8^7; $(16^3)^5$ у вигляді степеня з основою 2;

2) 25^3; 625^7 у вигляді степеня з основою 5.

127. Подайте вираз:

1) 9^7; $(81^3)^5$ у вигляді степеня з основою 3;

2) 100^4; 1000^9 у вигляді степеня з основою 10.

128. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

1) $256 : 2^5$; 2) $243 : 3^4 \cdot 9$; 3) $\dfrac{125^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 25}$; 4) $\dfrac{100 \cdot 10^7}{10^5 \cdot 1000}$.

129. Подайте у вигляді степеня (n – натуральне число):

1) x^5x^n; 2) $x^8 : x^n$, $n < 8$;
3) $x^n : (x^8 \cdot x^9)$, $n > 17$; 4) $x^{2n} : x^n \cdot x^{3n+1}$;
5) $((x^n)^3)^5$; 6) $(-x^4)^{2n}$.

130. Знайдіть значення виразу:

1) $5^3 \cdot 2^3$; 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \cdot 20^2$; 3) $0{,}2^{13} \cdot 5^{13}$;

4) $(1{,}5)^7 \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^7$; 5) $0{,}5^7 \cdot 2^8$; 6) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^8$.

131. Обчисліть:

1) $0{,}25^7 \cdot 4^7$; 2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^5 \cdot 14^5$; 3) $\left(1\dfrac{1}{8}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$; 4) $1{,}5^7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^9$.

132. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

1) $\dfrac{9^5}{3^7}$; 2) $\dfrac{8^7}{4^8}$; 3) $\dfrac{27^3 \cdot 9^4}{81^3}$; 4) $\dfrac{25^4 \cdot 125^{10}}{5^{36}}$.

4 **133.** Знайдіть значення виразу:

1) $\dfrac{5^7 \cdot 7^8}{35^7}$; 2) $\dfrac{2^{17} \cdot 3^6}{24^5}$; 3) $\dfrac{36^7}{2^{12} \cdot 3^{10}}$; 4) $\dfrac{27^3}{18^4}$.

134. Обчисліть:

1) $\dfrac{7^9 \cdot 49^8}{343^8}$; 2) $\dfrac{6^{12}}{2^{10} \cdot 3^{11}}$; 3) $\dfrac{2^8 \cdot 5^7}{100^3}$; 4) $\dfrac{36^5}{24^6}$.

135. Порівняйте вирази:

1) 6^{10} і 36^5; 2) 10^{20} і 20^{10}; 3) 5^{14} і 26^7; 4) 2^{3000} і 3^{2000}.

Вправи для повторення

136. Спростіть вираз:

1) $5{,}2 \cdot 6a$; 2) $-4{,}5b \cdot 8$; 3) $-5x \cdot (-12)$;

4) $\frac{2}{3}m \cdot \frac{3}{4}k$; 5) $1\frac{1}{3}x \cdot \left(-1\frac{2}{7}y\right)$; 6) $-1{,}8a \cdot (-b) \cdot 5c$.

137. Вартість деякого товару становила 80 грн. Спочатку її знизили на 15 %, а потім підвищили на 10 %. Знайдіть:

1) вартість товару після зниження;
2) вартість товару після підвищення;
3) як саме і на скільки гривень змінилася вартість товару;
4) як саме і на скільки відсотків змінилася вартість товару.

138. Нехай $a + b = 5$ і $c = -2$. Знайдіть значення виразу:

1) $a + b - c$; 2) $a - 2c + b$; 3) $\frac{a+b+c}{c}$; 4) $c(a + b - 4c)$.

139. Спростіть вираз $1{,}7\left(1\frac{1}{5}a - 4b\right) - 1{,}5(1{,}2b - a)$ і знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = -10$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

140. *Задача Ньютона.* Трава на галявині росте рівномірно щільно й швидко. Відомо, що 70 корів з'їли б її за 24 дні, а 30 корів – за 60 днів. Скільки корів з'їли б усю траву за 96 днів?

§ 5. ОДНОЧЛЕН. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ОДНОЧЛЕНА

Розглянемо вирази 7; $-\frac{8}{11}$; a^9; $-b$; $7b^2m$; $4a^2 \cdot (-5)ac$.

Це – числа, змінні, їх степені і добутки. Такі вирази називають ***одночленами***.

Цілі вирази – числа, змінні, їх степені і добутки – називають *одночленами*.

Вирази $a + b^2$; $c^3 - 5m$; $0{,}9a^2 : m$ не є одночленами, оскільки містять дії додавання, віднімання, ділення.

Спростимо одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$, використавши переставну і сполучну властивості множення:

$$4a^2 \cdot (-5)ac = 4 \cdot (-5)a^2ac = -20a^3c.$$

Звівши одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$ до вигляду $-20a^3c$, кажуть, що звели його *до стандартного вигляду*.

Якщо одночлен є добутком, що має один числовий множник, який записаний на першому місці, а інші множники є степенями різних змінних, то такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

До одночленів стандартного вигляду належать і такі одночлени, як 5; -9; b; $-b^3$.

Очевидно, що до стандартного вигляду можна звести будь-який одночлен.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають ***коефіцієнтом*** цього одночлена.

Наприклад, коефіцієнтом одночлена $-20a^3c$ є число -20, а коефіцієнтом одночлена $\frac{7}{11}b^9$ – число $\frac{7}{11}$.

Коефіцієнтом одночлена c^2d є 1, оскільки $c^2d = 1 \cdot c^2d$, а коефіцієнтом одночлена $-p^7$ є -1, оскільки $-p^7 = -1 \cdot p^7$. Тобто замість коефіцієнта -1 записують лише знак мінус, а коефіцієнт, що дорівнює 1, взагалі не записують.

Для кожного *одночлена* можна вказати *його степінь*.

Степенем одночлена **називають суму показників степенів усіх змінних, які він містить. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його степінь дорівнює нулю.**

Наприклад, одночлен $4a^2b^7c^3$ – одночлен дванадцятого степеня, оскільки $2 + 7 + 3 = 12$; m^7n – одночлен восьмого степеня, оскільки $7 + 1 = 8$; $-5a^4$ – одночлен четвертого степеня; $5m$ – одночлен першого степеня. Одночлен -7 не містить змінних, тому є одночленом нульового степеня.

Який вираз називають одночленом? ● Який вигляд одночлена називають стандартним виглядом? ● Наведіть приклад одночлена стандартного вигляду та назвіть його коефіцієнт. ● Що називають степенем одночлена?

141. (*Усно*) Які з виразів є одночленами:

1) $3{,}7x^2y$; 2) $-0{,}13mpk$; 3) $x^2 - 5$;

4) $d \cdot (-0{,}7)$; 5) x^2xt; 6) $\left(-\frac{2}{7}p + 9\right)m$;

7) $a - b$; 8) $t^{11} : t^3$; 9) $4(x + y)^7$;

10) $-q$; 11) $-0{,}7$; 12) 0?

142. (*Усно*) Назвіть одночлени стандартного вигляду та їх коефіцієнти:

1) $4xy$; 2) $-5aba$; 3) $7m^2nm^3n$; 4) $-a^7b^9$;
5) $0{,}3p \cdot 3m$; 6) $-2abc$; 7) a^9b^7; 8) 14.

143. Які з виразів є одночленами? Серед одночленів укажіть ті, які записано у стандартному вигляді:

1) $5m \cdot 2p$; 2) $-8a^2b$; 3) $x^2 + x + 1$;

4) $m \cdot mk \cdot 5$; 5) $\left(\frac{2}{7}p - 1\right) \cdot 8$; 6) $-a^2$;

7) $17 + a$; 8) -129; 9) c^{18};
10) $2(a - b)^2$; 11) $1 : c$; 12) $-abcd$.

144. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, укажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $7a^2a^3a$; 2) $8 \cdot a \cdot 0{,}1m \cdot 2p$;

3) $5t \cdot (-4at)$; 4) $-1\frac{2}{3}m^4 \cdot 12m^2p$;

5) $-5a^2 \cdot 0{,}2am^7 \cdot (-10m)$; 6) $t^3 \cdot (-p)^7 \cdot t$.

145. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, вкажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $-7m^2b \cdot 8mb^2$; 2) $5m \cdot 2a \cdot (-3b)$;

3) $-7a \cdot (-5a^2)$; 4) $-2{,}2a^2 \cdot \frac{25}{44}a^3p$;

5) $-a \cdot (-0{,}2a^2p) \cdot (-0{,}3p^4)$; 6) $c^5 \cdot (-a) \cdot (-c^4a) \cdot a^7$.

146. Знайдіть значення одночлена:

1) $3{,}5a^2$, якщо $a = 4;\ 0{,}1$;
2) $-4m^3$, якщо $m = 0;\ -1$;
3) $10xy$, якщо $x = 1{,}4,\ y = -5$;
4) $-0{,}01a^2c$, якщо $a = 5,\ c = -2$.

147. Обчисліть значення одночлена:

1) $1{,}6a^2$, якщо $a = -5;\ 0;\ -1$;
2) $5b^2c$, якщо $b = 0{,}2$ і $c = 0{,}1$; $b = -0{,}4$ і $c = 2$.

148. Заповніть таблицю у зошиті:

a	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$4a^2$											
$-2a^2$											

149. Знайдіть:

1) значення x, при якому значення одночлена $-0{,}8x$ дорівнює 0; 1; –1; 12;
2) значення a і b, при яких значення одночлена $15ab$ дорівнює 10; –60; 0.

150. Знайдіть:

1) значення a, при якому значення одночлена $-0{,}6a$ дорівнює 0; –3; 12; –300;
2) пару значень x і y, при яких значення одночлена $12xy$ дорівнює 15; –120; 0.

151. (*Усно*) Чи є правильним твердження? У разі позитивної відповіді, обґрунтуйте її; якщо відповідь негативна – наведіть приклад, що спростовує твердження.

1) Одночлен $7m^2$ при будь-яких значеннях m набуває додатних значень;
2) одночлен $\dfrac{1}{16}p^4$ при будь-яких значеннях p набуває невід’ємних значень;
3) одночлен $-12a^2$ при будь-яких значеннях a набуває від’ємних значень;
4) одночлен $8b^3$ при будь-яких значеннях b набуває додатних значень.

152. Знайдіть об’єм прямокутного паралелепіпеда, висота якого дорівнює x см, ширина у 3 рази більша за висоту, а довжина у 2 рази більша за ширину.

153. Ширина прямокутника дорівнює b дм, а довжина втричі більша за ширину. Знайдіть площу прямокутника.

Вправи для повторення

154. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $3(12x - 5) + 4x$; 2) $7(a - 1) - 7a + 13$;
3) $4{,}2(x-y) + 3{,}5(x + y)$; 4) $12 - 5(1 - x) - 5x$.

155. Серед виразів $3(y - x)$, $-3(x - y)$, $-3x - 3y$, $-3x + 3y$ знайдіть ті, що тотожно рівні виразу $3y - 3x$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

156. *Задача Стенфордського університету.* Щоб пронумерувати всі сторінки книжки, друкар використав 1890 цифр. Скільки сторінок у цій книжці?

§ 6. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ. ПІДНЕСЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ ДО СТЕПЕНЯ

При множенні одночленів використовують властивості дії множення та правило множення степенів з однаковими основами.

Приклад 1. Перемножити одночлени $-3x^3y^7$ і $5x^2y$.

Р о з в' я з а н н я. $-3x^3y^7 \cdot 5x^2y = (-3 \cdot 5)(x^3x^2)(y^7y) = -15x^5y^8$.

Добутком будь-яких одночленів є одночлен, який зазвичай подають у стандартному вигляді. Аналогічно до прикладу 1 можна множити три і більше одночленів.

При піднесенні одночлена до степеня використовують властивості степенів.

Приклад 2. Піднести одночлен: 1) $-2x^2y$ до куба; 2) $-p^7m^2$ до четвертого степеня.

Р о з в' я з а н н я. 1) $(-2x^2y)^3 = (-2)^3(x^2)^3y^3 = -8x^6y^3$;
2) $(-p^7m^2)^4 = (-1)^4(p^7)^4(m^2)^4 = p^{28}m^8$.

Результатом піднесення одночлена до степеня є одночлен, який зазвичай записують у стандартному вигляді.

Розглянемо ще декілька прикладів.

Приклад 3. Спростити вираз $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y$.

Р о з в’ я з а н н я. $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x^3(y^5)^3 \cdot 18x^5y =$

$= \left(-\frac{8}{27} \cdot 18\right) \cdot (x^3x^5) \cdot (y^{15}y) = -5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Приклад 4. Подати одночлен $16m^8p^{10}$ у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду.

Р о з в’ я з а н н я. Оскільки $16 = 4^2$, $m^8 = (m^4)^2$, $p^{10} = (p^5)^2$, то $16m^8p^{10} = 4^2 \cdot (m^4)^2 \cdot (p^5)^2 = (4m^4p^5)^2$.

Які правила та властивості використовують при множенні одночленів; піднесенні одночлена до степеня?

157. (*Усно*) Перемножте одночлени:

1) $2a$ і $4m$; 2) $-b$ і $3c$; 3) $7a^2$ і $-5b$; 4) $-2x^2$ і $-y^2$.

158. Виконайте множення одночленів:

1) $1,5x \cdot 12y$;
2) $-p^2 \cdot 9p^7$;
3) $8a \cdot \left(-\frac{3}{4}a^7\right)$;
4) $-\frac{2}{3}a \cdot (-12ab^3)$;
5) $0,7mn^2 \cdot (-m^7n^3)$;
6) $-0,2m^7p^9 \cdot (-4m^4p)$;
7) $-0,6ab^2c^3 \cdot 0,5a^3bc^7$;
8) $\frac{3}{4}mn^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}m\right) \cdot \frac{5}{3}n^7$.

159. Знайдіть добуток одночленів:

1) $20a \cdot (-0,5b)$;
2) $-a^2 \cdot (-3a^7b)$;
3) $5b \cdot \left(-\frac{1}{5}b^3\right) \cdot 2c$;
4) $\frac{3}{5}xy^3 \cdot \frac{10}{21}x^2y^5$;
5) $\frac{3}{5}ab^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^3\right) \cdot 2b^7$;
6) $-\frac{1}{2}m^2p \cdot \frac{2}{3}m^3p \cdot \frac{1}{5}mp^3$.

160. Перемножте одночлени:

1) $-13x^2y$ і $12xy^3$;
2) $0,8mn^8$ і $50m^2n$;
3) $-\frac{1}{5}ab^2$; $15a^2p$ і $-\frac{1}{3}pb^4$;
4) $20xy^2$; $-0,1x^2y$ і $0,2x^2y^2$.

161. Знайдіть два різних записи одночлена $-12m^2n^5$ у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду.

162. Знайдіть два різних записи одночлена $18m^2n^7$ у вигляді добутку:

1) двох одночленів стандартного вигляду;
2) трьох одночленів стандартного вигляду.

163. (*Усно*) Піднесіть одночлен до степеня:

1) $(-mn^2)^2$; 2) $(2a^2b)^3$; 3) $(-m^3b^2)^4$; 4) $(-a^3b^5)^7$.

164. Піднесіть до квадрата одночлен:

1) $3a$; 2) $2b^2$; 3) $-4a^3b^7$;
4) $-0{,}1p^9a^4$; 5) $-\frac{1}{5}m^5$; 6) $\frac{6}{7}p^6m^8$.

165. Піднесіть до куба одночлен:

1) $2p$; 2) $7m^5$; 3) $-3a^3b^2$;
4) $-0{,}1a^7b^2$; 5) $\frac{1}{4}p^6$; 6) $-\frac{2}{5}mn^4$.

166. Виконайте піднесення до степеня:

1) $(-xy^3)^3$; 2) $(-7a^2bc^3)^2$; 3) $(p^3m^4q^5)^4$;
4) $(-2a^2b)^4$; 5) $\left(\frac{1}{6}p^2c^5\right)^3$; 6) $(-c^5m^{10}a^3)^5$.

167. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $(-5x)^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^3$; 3) $(-0{,}2a^2b^3)^4$;
4) $(-ab^7c^5)^6$; 5) $(-10a^{11}b)^5$; 6) $(a^8c^{10})^7$.

168. Подайте вираз:

1) $\frac{1}{9}x^6$; $0{,}25m^6p^{10}$; $121a^{18}b^2c^4$ у вигляді квадрата одночлена;
2) $0{,}001a^9$; $-125p^3b^{12}$; $\frac{8}{27}c^6m^{15}a^{21}$ у вигляді куба одночлена.

169. Який одночлен стандартного вигляду треба записати в дужках замість пропусків, щоб одержати правильну рівність:

1) $(\ \dots\ )^2 = 4m^6$; 2) $(\ \dots\ )^2 = 0{,}36p^8q^{10}$;
3) $(\ \dots\ )^3 = -8c^9$; 4) $(\ \dots\ )^3 = 1000c^6m^{12}$;
5) $(\ \dots\ )^4 = 16a^4b^8$; 6) $(\ \dots\ )^5 = c^{15}p^{45}$?

170. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати замість зірочки, щоб одержати правильну рівність:

1) $* \cdot 4m^2n = 12m^7n^{12}$; 2) $5a^2b \cdot * = a^3b^7$;

3) $* \cdot (-2m^2p) = 24m^3p^2$; 4) $* \cdot (-9a^2b) = a^3b$;

5) $5m^2a^3 \cdot * = -5m^2a^3$; 6) $4m^2n \cdot * = -\frac{1}{16}m^2n^8$?

171. Який одночлен стандартного вигляду треба записати замість зірочки, щоб одержати правильну рівність:

1) $* \cdot 3m^2n^3 = 15m^3n^8$; 2) $-7p^2x^3 \cdot * = 21p^2x^9$;

3) $* \cdot (-3a^3b^9) = a^6b^{10}$; 4) $12p^3m \cdot * = -\frac{1}{2}p^3m$?

172. Спростіть вираз:

1) $15m^2 \cdot (4m^3)^2$; 2) $-0{,}5m^5 \cdot (2m^3)^4$;

3) $(-3a^3b^4)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}ab^3\right)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}ac^4\right)^3 \cdot 18a^5c$.

173. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $6a^3 \cdot (2a^5)^2$; 2) $-0{,}8a^4 \cdot (5a^7)^3$;

3) $(-2b^2a^7)^4 \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b\right)$; 4) $\left(-\frac{4}{5}mn^4\right)^3 \cdot 25m^4n$.

174. Подайте вираз у вигляді добутку числа 5 і квадрата деякого виразу:

1) $5a^4b^2$; 2) $20c^4d^2m^8$; 3) $\frac{5}{16}p^{12}$.

175. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $(8ab^3)^2 \cdot (0{,}5a^3b)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}m^2n^8\right)^3 \cdot (-4m^7)^2$;

3) $-(-m^2n^3)^4 \cdot (7m^3n)^2$; 4) $(-0{,}2x^3c^7)^5 \cdot (10xc^3)^5$.

176. Спростіть вираз:

1) $(10m^2n)^2 \cdot (3mn^2)^3$; 2) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (4a^5)^2$;

3) $-(3a^6m^2)^3 \cdot (-a^2m)^4$; 4) $(-5xy^6)^4 \cdot (0{,}2x^6y)^4$.

177. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-4ab^2$:

1) $8a^2b^2$; 2) $-\frac{1}{5}ab^4$; 3) $-7{,}8a^3b^5$; 4) $1\frac{1}{8}a^3b^2$.

178. Подайте одночлен у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3mn^2$:

1) $12m^2n^2$; 2) $-\frac{1}{4}mn^5$; 3) $-6{,}9m^7n^8$; 4) $1\frac{1}{5}m^8n^2$.

179. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду (n – натуральне число):

1) $(-0{,}2a^{n+5}b^{n+2})\cdot(0{,}5a^{n-2}b^{n+3})$, $n>2$;
2) $(2a^{2n}b^5)^3\cdot(-3a^3b^{3n})^2$;
3) $(a^2b^3)^n\cdot(a^{2n}b)^3\cdot(a^2b^{3n})^5$;
4) $(x^{2n-1}y^{3n+1})^2\cdot(x^{3n-1}y^{2n+1})^3$.

180. Відомо, що $3ab^2=7$. Знайдіть значення виразу:

1) ab^2; 2) $5ab^2$; 3) $-9a^2b^4$; 4) $27a^3b^6$.

181. Відомо, що $5xy^2=9$. Знайдіть значення виразу:

1) xy^2; 2) $7xy^2$; 3) $-25x^2y^4$; 4) $125x^3y^6$.

Вправи для повторення

182. Для перевезення школярів до літнього оздоровчого табору використали 3 мікроавтобуси марки «Газель» та 2 мікроавтобуси марки «Богдан». У кожній «Газелі» розмістилося по x учнів, а у кожному «Богдані» – по y учнів. Скільки всього учнів прибуло вказаним транспортом до табору на відпочинок? Запишіть відповідь у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $x=20$; $y=22$.

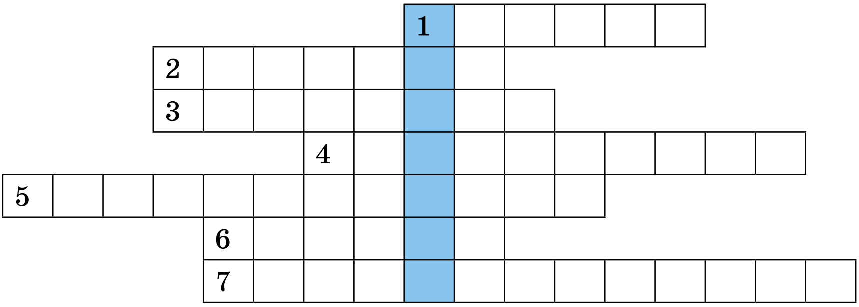
183. Замініть зірочку таким виразом, щоб рівність стала тотожністю:

1) $(b^3)^2\cdot * = b^{10}$; 2) $(m^2)^3\cdot * = -m^{14}$;
3) $(a\cdot a^4)^2 : * = a^3$; 4) $n^6\cdot(n\cdot n^2)^2 = *\cdot(-n^4)$.

184. Обчисліть значення виразу $\frac{2^{n+1}\cdot 7^{n+2}}{14^n}$, де n – натуральне число.

Цікаві задачі для учнів неледачих

185. *Видатні українці.* Запишіть по горизонталях прізвища видатних українців (за потреби використайте додаткову літературу та Інтернет) та прочитайте у виділеному стовпчику одне з фундаментальних понять математики, з яким ви познайомитеся в наступному розділі.



1. Видатний письменник, поет, учений, публіцист.
2. Перший президент незалежної України.
3. Видатний поет і художник, літературна спадщина якого вважається основою української літератури та сучасної української мови.
4. Один з найвідоміших у світі авіаконструкторів.
5. Видатна актриса, яка першою в Україні здобула звання Народної артистки Української РСР.
6. Видатний футболіст і тренер, володар «Золотого м’яча» як найкращий футболіст Європи 1975 року.
7. Автор «Енеїди» – першого твору нової української літератури, написаного народною мовою, один із засновників нової української драматургії.

Домашня самостійна робота № 1

Кожне завдання має по чотири варіанти відповідей (А–Г), серед яких лише один є правильним. Оберіть варіант правильної відповіді.

1. Який з виразів тотожно рівний виразу $b + b + b + b$?

А) b^4; **Б)** $4 + b$; **В)** $4b$; **Г)** $\frac{b}{4}$.

2. Який з виразів є одночленом?

А) $7x - y$; **Б)** $7x + y$; **В)** $\frac{7x}{y}$; **Г)** $7xy$.

3. $a^6 : a^3 = ...$

А) a^3; Б) a^2; В) a; Г) 1.

4. $(-2)^3 = ...$

А) 8; Б) -8; В) -6; Г) 6.

5. Запишіть у вигляді виразу квадрат суми чисел m і $3a$.

А) $(m - 3a)^2$; Б) $m^2 + (3a)^2$; В) $(m + 3a)^2$; Г) $(m \cdot 3a)^2$.

6. Обчисліть значення виразу $2{,}5a^2$, якщо $a = -4$.

А) -40; Б) 40; В) 100; Г) -100.

7. При якому значенні a значення виразів $5a + 6$ і $-a + 7$ рівні між собою?

А) 6; Б) $-\frac{1}{6}$; В) $\frac{1}{6}$; Г) a – будь-яке число.

8. Обчисліть $\frac{9^{18}}{27^{12}}$.

А) 3; Б) 9; В) 27; Г) 1.

9. $\left(4mp^3\right)^2 \cdot \left(0{,}5m^7p\right)^3 = ...$

А) $\frac{1}{2}m^{23}p^9$; Б) $2m^8p^4$; В) $2m^{23}p^9$; Г) $2m^{12}p$.

10. Якого найбільшого значення може набувати вираз $1 - (a - 3)^2$?

А) 1; Б) -1; В) -3; Г) -8.

11. Яке із чисел 2^{300}; 3^{200}; 7^{100}; 25^{50} є найбільшим?

А) 2^{300}; Б) 3^{200}; В) 7^{100}; Г) 25^{50}.

12. Знайдіть значення виразу $8x^2y^4$, якщо $2xy^2 = -5$.

А) 25; Б) -50; В) 50; Г) 100.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 1 – § 6

1. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $3b + 4b$ і $7b$; 2) $a + a + a$ і a^3;
3) $m + 2a$ і $2a + m$; 4) $3(x - 2)$ і $3x - 2$?

2. Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4$;

2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

3. Виконайте дії:

1) x^5x^4; 2) $x^7 : x^2$.

4. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}4 \cdot (-5)^4$; 2) $2^5 - 4^3 + (-1)^5$.

5. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $(m^3)^4 \cdot m^7$; 2) $(a^2)^7 : (a^3)^2$.

6. Запишіть вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-0{,}3m^2np^3 \cdot 4mn^2p^7$; 2) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3$.

7. Спростіть вираз:

1) $0{,}2a^2b \cdot (-10ab^3)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{4}m^2n^3\right)^4 \cdot (4m^5n)^3$.

8. Доведіть тотожність: $2(a + b - c) + 3(a - c) - 2b = 5(a - c)$.

9. Порівняйте вирази:

1) 5^{12} і 25^6; 2) 2^{30} і 3^{20}.

Додаткові вправи

10. Доведіть, що сума трьох послідовних непарних чисел ділиться на 3.

11. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $m^4 - 12$; 2) $(a + 2)^8 + 7$?

12. Відомо, що $4m^2n = 9$. Знайдіть значення виразу:

1) $12m^2n$; 2) $4m^4n^2$.

З історії математичного олімпіадного руху України

Математичні змагання є досить популярними серед школярів України. Це й індивідуальні змагання – математична олімпіада, і командні – турнір юних математиків або математичні бої. Участь у цих змаганнях надає можливість школярам долучитися до прекрасного світу цікавих і нестандартних задач, перевірити свої знання з математики, повірити у власні сили або віднайти в собі хист до математики.

Всеукраїнська учнівська олімпіада з математики проходить щорічно в чотири етапи. Перший – це шкільні олімпіади, другий – районні й міські (для міст обласного підпорядкування), третій – обласні олімпіади, олімпіади міст Києва і Севастополя та Автономної Республіки Крим. Четвертий – це заключний етап, який з призерів третього етапу визначає переможців Всеукраїнської олімпіади. Саме за підсумками четвертого етапу складається перелік кандидатів до складу команди України для участі в Міжнародній математичній олімпіаді. Щоб увійти до команди, переможці четвертого етапу беруть участь у відбірково-тренувальних зборах, за підсумками яких і формується остаточний склад команди. Кожного року кількість представників України на Міжнародній олімпіаді визначається залежно від її рейтингу серед інших країн-учасниць. Що вищий рейтинг, то більше учасників увійдуть до команди. Рейтинг команди залежить від результатів її виступу на Міжнародній олімпіаді, причому на рейтинг впливає та кількість балів, яку вибороли учасники за всі розв'язані на олімпіаді конкурсні задачі.

Історія математичного олімпіадного руху України розпочалася з Київських математичних олімпіад. Перша в Україні олімпіада пройшла в Києві в приміщенні Київського державного університету (нині Київський національний університет імені Тараса Шевченка) у 1935 році з ініціативи видатного українського математика Михайла Пилиповича Кравчука (1892–1942). Наступного року в Київській олімпіаді взяли участь й учні інших міст України. Зокрема, у 1936 році серед переможців олімпіади був харківський десятикласник Олексій Погорєлов, який згодом пов'язав свою наукову діяльність з геометрією, ставши видатним геометром, академіком Національної академії наук України та Російської академії наук, автором шкільного підручника з геометрії, за яким кілька десятиліть успішно навчалися й радянські школярі, й українські школярі після здобуття Україною незалежності. У тому ж 1936 році було започатковано районні олімпіади та проведено першу Всеукраїнську олімпіаду.

У 1938 році М.П. Кравчука було репресовано, але небайдужі до математики молоді вчені зберегли традицію щорічно проводити Київську математичну олімпіаду. У 1942–1945 рр. під час Великої Вітчизняної війни олімпіади не проводились, а потім їх проведення поновили. Важливу роль у поновленні Київської математичної олімпіади відіграв Микола Миколайович Боголюбов, що на той час був молодим професором фізико-математичного (нині механіко-математичний) факультету Київського державного університету. У післявоєнні роки до організації Київських математичних олімпіад школярів за пропозицією М.М. Боголюбова долучилася відомий педагог та історик математики Любов Миколаївна Граціанська. На той час учні 7–10 класів, що цікавилися математикою, мали можливість щонеділі відвідувати математичні гуртки при Київському державному університеті, організацією яких керувала Л.М. Граціанська. Заняття гуртка проводили студенти механіко-математичного факультету, які згодом і очолили математичний олімпіадний рух України. Серед них А.В. Скороход, М.Й. Ядренко, В.А. Вишенський, В.І. Михайловський та інші. Гуртківці традиційно брали участь у Київських математичних олімпіадах. Зазначимо, що тоді учасниками Київської олімпіади могли стати як школярі Києва, так й учні з інших міст України, бо до 1961 року олімпіада проводилася лише в Києві. І нині, за традицією, у Київській математичній олімпіаді можуть брати участь усі охочі школярі.

У 1961 році організатори Московської математичної олімпіади запросили до участі в ній школярів з різних республік тодішнього СРСР. Так відбулася перша математична олімпіада, учасники якої були з різних республік СРСР, а олімпіаду назвали Всесоюзною. Участь у ній взяли й представники України. Щоб і надалі щорічно змагатися, необхідно було відбирати сильну команду учасників, збираючи талановитих школярів по різних куточках України. Це завдання могла вирішити Республіканська математична олімпіада, у якій мали між собою змагатися переможці українських обласних олімпіад, міст Києва і Севастополя та Автономної Республіки Крим, тобто школярі з усіх регіонів України. Саме 1961 рік вважають роком заснування Республіканської олімпіади – заключного етапу математичної олімпіади в Україні, який став прототипом четвертого етапу нинішньої Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики. Отже, у 1961 році Республіканська олімпіада з математики стала освітянською подією загальнодержавного значення. Саме з її переможців надалі й формувалася команда юних математиків для участі у Всесоюзних олімпіадах.

Значну роль у виявленні математично обдарованої учнівської молоді та залучення її до математичних змагань у радянські часи відіграла Республіканська заочна фізико-математична школа (РЗФМШ). Її заняття демонструвалися щочетверга о 16 годині українським телебаченням. Школярі слухали цікаві лекції провідних математиків, знайомилися із завданнями контрольних робіт, які мали розв'язати та надіслати до організаторів РЗФМШ на перевірку, а також брали участь у заочній олімпіаді, завдання якої оголошувалися в цій програмі. За результатами заочних олімпіад і контрольних робіт виявляли математично обдарованих школярів України, залучали їх до участі в очному етапі олімпіади РЗФМШ, а випускників шкіл – до навчання у провідних вишах України, зокрема і на механіко-математичному факультеті Київського державного університету. Нині багато вчених старшого покоління тепло відгукуються про РЗФМШ, наголошуючи, що саме завдяки їй вони зацікавилися математикою та прийшли в науку.

Не останню роль у підвищенні цікавості учнів до математики, залучення до її багатогранного світу задач відігравав і щорічний збірник науково-популярних статей для школярів «У світі математики», що почав виходити друком у 1968 році. Серед авторів матеріалів збірника були і відомі професори механіко-математичного факультету Київського державного університету, і його студенти й аспіранти. А в редакційну колегію збірника увійшли відомі українські математики А.Г. Конфорович, М.Я. Лященко, М.Й. Ядренко, А.Я. Дороговцев та інші. Професор Київського державного університету Микола Йосипович Ядренко до останніх своїх днів був відповідальним редактором цього видання. Збірник «У світі математики» виходить друком і нині, трохи змінивши свій формат, але не змінивши свого змісту й мети: популяризувати математику серед школярів.

Також М.Й. Ядренко понад 30 років (до 2004 р.) очолював журі Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики, включаючи й 1991 рік, коли учнівські математичні олімпіади в Україні посіли чільне місце у світовій мережі математичних змагань школярів.

У 1992 році непересічною подією для українського математичного олімпіадного руху стала участь команди України в Міжнародній математичній олімпіаді (ММО), хоча в цей рік за регламентом вона мала лише статус спостерігача. А з 1993 року Україна стає офіційним учасником Міжнародної математичної олімпіади. Школярі України гідно представляють свою країну, щороку виборюючи золоті, срібні та бронзові медалі. Загалом з 1993 до 2014 року Україна на Міжнародній математичній олімпіаді виборола 118 медалей (31 золоту, 50 срібних та 37 бронзових) і має високий рейтинг з-поміж 125 команд-учасниць з інших країн світу.

Логотип ММО

§ 7. МНОГОЧЛЕН. ПОДІБНІ ЧЛЕНИ МНОГОЧЛЕНА ТА ЇХ ЗВЕДЕННЯ. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД МНОГОЧЛЕНА. СТЕПІНЬ МНОГОЧЛЕНА

Вираз $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ є сумою одночленів $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ і -8. Цей вираз називають ***многочленом***.

***Многочленом* називають суму одночленів.**

Одночлени, з яких складається многочлен, називають ***членами многочлена***. Наприклад, многочлен $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ складається із чотирьох членів: $7x^2y^3$; $-5xy^7$; $9x^5$ і 8.

Многочлен, який містить два члени, називають ***двочленом***, многочлен, який містить три члени, – ***тричленом***. Наприклад, $a + b^7$, $2xy - 3y^7$ – двочлени; $x + xy + y^3$, $mn + m - n$ – тричлени. Одночлен вважають окремим видом многочлена.

У многочлені $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$ члени $7x^2y$ і $-5x^2y$ є подібними доданками, оскільки вони мають одну й ту саму буквену частину x^2y. Також подібними доданками є й члени 8 і -9, які не мають буквеної частини. Подібні доданки многочлена називають ***подібними членами многочлена***, а зведення подібних доданків у многочлені – ***зведенням подібних членів многочлена***.

Приклад 1. Звести подібні члени у многочлені $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$.

Р о з в' я з а н н я. $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9 = (7x^2y - 5x^2y) + (8 - 9) + 9xy = 2x^2y - 1 + 9xy$.

Кожний член многочлена $2x^2y - 1 + 9xy$ є одночленом стандартного вигляду, причому цей многочлен уже не містить подібних доданків. Такі многочлени називають ***многочленами стандартного вигляду***.

Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Приклад 2. Чи записано в стандартному вигляді многочлени: 1) $xy^2 - x^2y^3x + 7$; 2) $m^2 + 3mn - 3n^2$; 3) $9ab + 7 - 5ab$?

Р о з в’ я з а н н я. 1) Оскільки x^2y^3x не є одночленом стандартного вигляду, то многочлен $x^2y - x^2y^3x + 7$ не є многочленом стандартного вигляду.

2) Многочлен $m^2 + 3mn - 3n^2$ є многочленом стандартного вигляду.

3) Многочлен $9ab + 7 - 5ab$ містить подібні доданки, тому не є многочленом стандартного вигляду.

Приклад 3. Записати у стандартному вигляді многочлен $3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8$.

Р о з в’ я з а н н я. Спочатку зведемо до стандартного вигляду члени многочлена, потім зведемо подібні доданки:

$$3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8 =$$
$$= \underline{3x^3y} + 5 - \underline{\underline{4xy^3}} - \underline{5x^3y} + \underline{\underline{7xy^3}} - 8 = -2x^3y + 3xy^3 - 3.$$

Члени многочлена $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$, що має стандартний вигляд, є одночленами відповідно п’ятого, шостого та нульового степенів. Найбільший із цих степенів називають ***степенем многочлена***. Отже, $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$ є многочленом шостого степеня.

Степенем многочлена стандартного вигляду **називають найбільший зі степенів одночленів, що до нього входять.**

Наприклад, многочлени $5x - 7$ та $2a - 3b + 7$ – першого степеня; многочлен $2mn + n$ – другого; $2x^4 + x^5 - x^2$ – п’ятого степеня.

Степенем довільного многочлена називають степінь тотожно рівного йому многочлена стандартного вигляду.

Приклад 4. Визначити степінь многочлена

$$2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7.$$

Р о з в’ я з а н н я. Спочатку запишемо многочлен у стандартному вигляді: $\underline{2x^2y} + 3xy - \underline{6x^2y} + \underline{4x^2y} - 7 = 3xy - 7$. Многочлен $3xy - 7$ є многочленом другого степеня, а тому і многочлен $2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7$ є многочленом другого степеня.

Члени многочлена можна записувати в різній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, які містять одну змінну, члени, як правило, упорядковують за зростанням або спаданням показників степенів цієї змінної.

Наприклад, $7a^4 + 5a^3 - 8a^2 - 5$ або $-5 - 8a^2 + 5a^3 + 7a^4$.

Будь-який многочлен є цілим виразом. Але не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $3(x - 1)$; $(a + b)^2$; $(m - n)^3$ не є многочленами, бо вони не є сумою одночленів.

Що називають многочленом? ● Що називають членами многочлена? ● Який многочлен називають двочленом, а який – тричленом? ● Які члени многочлена називають подібними? ● Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду? ● Що називають степенем многочлена?

186. (*Усно*) Які з даних виразів є многочленами:

1) $m^2(m - 5)$; 2) $3p^2 - p^2 + x^7$; 3) $\frac{7}{x-3}$; 4) b;

5) $(a + 3)(a - 2)$; 6) $n^2 - \frac{1}{3}n$; 7) $7{,}8$; 8) $(t - 2p)^2$?

187. Серед даних виразів виберіть многочлени:

1) $p^3 - p^2 - p$; 2) $\frac{a}{a-b}$; 3) c^2; 4) $a(a - b)$;

5) $-3\frac{1}{5}$; 6) $(x + 1)(x - 1)$; 7) $a^3 - 1$; 8) $(c + p)^3$.

188. Назвіть члени многочлена:

1) $3p^2n - 5pn^2 + 3 + 7pn$; 2) $-x^3 + 5x^2 - 9x + 7$.

189. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m^2$, $-2m$ і 3; 2) $7ab$, $-2a^2$ і b^2;

3) $4p$ і $2q^3$; 4) $-c^2$, $-3mc$, m^3 і 7.

190. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m$ і $-5n$; 2) m^3, $-2m^2$ і mn; 3) $-x^3$, $-2y^2$, xy і 4.

191. (*Усно*) Чи записано многочлен у стандартному вигляді? Для многочленів стандартного вигляду визначте їх степінь.

1) $5m^2 + m^3 + 1$; 2) $7x^2 + 2x + 3x^2$;

3) $2 + a + a^2b + 3$; 4) $c^2c + c^5 - 8$;

5) $3x^2x + 2xx^2 + x$; 6) $p^2 - 19$.

192. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $7x - 15xy - 8xy$;
2) $8ab - 5ab + 4b^2$;
3) $9a^4 - 5a + 7a^2 - 5a^4 + 5a$;
4) $18a^4b - 9a^4b - 7ba^4$;
5) $4b^3 + b^2 - 15 - 7b^2 + b^3 - b + 18$;
6) $9xy^2 - x^3 - 5xy^2 + 3x^2y - 4xy^2 + 2x^3$.

193. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $a^3 - 2a^3 + 3a^3$;
2) $-x^4 + 2x^3 - 3x^4 + 5x^2 - 3x^2$;
3) $7 + 3m^6 - 2m^3 - 5m^6 + 2m^6 - m^5 - 7$;
4) $9xy^3 + 6x^2y^2 - x^3y + x^2y^2 - 9xy^3$.

194. (*Усно*) Які з многочленів є многочленами четвертого степеня:

1) $a^3 + 3a^2 + 1$; 2) $a^2a^2 - 8$;
3) $a^4 - 4a^3 - a^4$; 4) $aa^3 + 2$?

195. Які з многочленів є многочленами п'ятого степеня:

1) $m^3 + m^4 - m^2$; 2) $12 + mm^4$;
3) $mm + mm^2 + m^2m^2$; 4) $m^5 - 3 - m^5$?

196. Зведіть многочлен до стандартного вигляду та визначте його степінь:

1) $x^2y + xyy$; 2) $2a \cdot a^2 \cdot 3b + a \cdot 5c$;
3) $7x \cdot 5y^2 - 4y \cdot 7x^2$; 4) $3a \cdot 4a \cdot (-5a) - a^3 \cdot (-8b)$.

197. Подайте многочлен у стандартному вигляді та визначте його степінь:

1) $3x \cdot x^2 + 2x \cdot 5y^2$; 2) $5a \cdot b^2a + 3b \cdot 2ab^2$;
3) $-5mn^3m + 4mmm$; 4) $5p \cdot 3p \cdot (-p) - p^4qp$.

198. Перепишіть многочлен в порядку спадання степенів змінної:

1) $7x - 5x^3 + x^4 - 9x^2 + 1$;
2) $8y^3 - 5 + 7y^6 - 9y^4 + y^2$.

199. Перепишіть многочлен в порядку зростання степенів змінної.

1) $3m^2 - 3m + m^3 - 8$;
2) $7a^2 - 9a^5 + 4a^3 + 5 - a^4$.

200. Знайдіть значення:

1) двочлена $3x^2 - 1$, якщо $x = -1; 2$;
2) тричлена $5m + 9n^2 - 1$, якщо $m = -2$, $n = \frac{1}{3}$.

201. Обчисліть значення многочлена:

1) $64x^3 - x^2 + 1$, якщо $x = \frac{1}{4}$;
2) $4mn - 3m + 2n - 4mn$, якщо $m = 4$, $n = -3$.

202. Обчисліть значення многочлена:

1) $9p^2 - p^3$, якщо $p = \frac{1}{3}$;
2) $2xy - 4x + 3y + 4x$, якщо $x = -1$, $y = 2$.

203. Чи існує таке значення x, при якому значення многочлена $x^2 + 5$ дорівнює нулю; є від'ємним?

204. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:

1) $3a^2ab - 5a^2b^2b^2 - 6ab \cdot 2a + 5ab \cdot 0{,}4ab - 1{,}5a \cdot 2b \cdot a^2$;
2) $3xy^2 \cdot 4x^3y + 5x^3y \cdot 2y \cdot (-x) - 10x^3y^3 \cdot \frac{1}{2}x - 7xy \cdot (-3xy^3)$.

205. Зведіть многочлен до стандартного вигляду і вкажіть його степінь:

1) $3a^2b^3 - ab^3 - a^3a - a^2b^2 \cdot b + 0{,}5ab \cdot 2b^2 + 4ab \cdot 0{,}5ab^2$;
2) $7x \cdot 2y^3 - 5x \cdot 3xy \cdot (-x) + \frac{1}{2}y \cdot (-14xy) - 3yx \cdot 4y^2$.

206. Зведіть многочлен $5xy^3 + x^2y^2 - 2x^3y - 3xy^3 - x^2y^2$ до стандартного вигляду і знайдіть його значення, якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$.

207. Доведіть, що многочлен $a^2 + b^2 + 1$ при будь-яких значеннях змінних a і b набуває лише додатних значень.

208. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб утворився многочлен четвертого степеня:

1) $x^3 + 3x^2 + * - 2$;
2) $m^6 - 4m^4 + mn + *$;
3) $a^3b - 3a^4b^3 + 3a^2 + *$;
4) $pq^3 - p^2q^2 + p^2q^3 + * - p^3q$.

209. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб після зведення до стандартного вигляду одержати многочлен, що не містить змінної x:

1) $3x - 12 + 5x + 15 - 9x + *$;

2) $5xy^2 - y^3 + 7y^2 + 7y^2x - 5 + *$.

210. Дано многочлен $5x^3 + 2x^2 - x + 7$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну x на одночлен:

1) m; 2) $-x$; 3) $2a$; 4) $3b^2$.

Отримані многочлени зведіть до стандартного вигляду.

211. Дано многочлен $3a^3 - 5a^2 + a - 8$. Утворіть з нього новий многочлен, замінивши змінну a на даний одночлен, та зведіть до стандартного вигляду:

1) x; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $3c^2$.

212. Оберіть ті многочлени, значення яких є додатними при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять; є від'ємними при будь-яких значеннях змінних, що до нього входять:

1) $a^4 + 3a^2 + 5$; 2) $c^5 + c^3 + c$;

3) $-p^2 - 7$; 4) $-m^2 - m^2n^2 - n^2 - 9$;

5) $-a - b - 7$; 6) $x^8 + y^6 + c^4 + 1$.

Вправи для повторення

213. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $x + 5 + (2x - 7)$;

2) $2y - 7 - (3y - 8)$;

3) $7 - (2x + 9) + (3x - 11)$.

214. Складіть числовий вираз і знайдіть його значення:

1) сума квадратів чисел 3,1 і –2,7;

2) квадрат різниці чисел –3,8 і –3,7;

3) куб суми чисел 1,52 і –1,5.

215. Замініть пропуски степенем з основою x так, щоб одержати тотожність:

1) $x^3 \cdot (\dots)^2 = x^{13}$; 2) $(\dots)^3 \cdot x^7 = x^{19}$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

216. Чи існують такі натуральні значення змінних x і y, при яких $x^5 + y^5 = 33^6$?

§ 8. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Додамо многочлени $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$. Для цього запишемо їх суму, потім розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$(7x^2 - 4x + 9) + (-3x^2 + 5x - 7) =$$
$$= 7x^2 - 4x + 9 - 3x^2 + 5x - 7 = 4x^2 + x + 2.$$

Ми записали суму многочленів $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$ у вигляді многочлена $4x^2 + x + 2$. Так само можна додавати три і більше многочленів. Суму будь-яких многочленів завжди можна подати у вигляді многочлена.

Тепер від многочлена $5x^2 - 8x + 7$ віднімемо многочлен $2x^2 - 6x - 5$. Для цього запишемо їх різницю, потім розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:

$$(5x^2 - 8x + 7) - (2x^2 - 6x - 5) =$$
$$= 5x^2 - 8x + 7 - 2x^2 + 6x + 5 = 3x^2 - 2x + 12.$$

Різницю многочленів $5x^2 - 8x + 7$ і $2x^2 - 6x - 5$ ми подали у вигляді многочлена $3x^2 - 2x + 12$. Різницю будь-яких многочленів завжди можна подати у вигляді многочлена.

Приклад 1. Розв'язати рівняння

$$(7x - 5) - (2x^2 + 3x - 7) + (9 - 2x) = 4 - 2x^2.$$

Р о з в' я з а н н я. Розкриємо дужки у лівій частині рівняння:

$$7x - 5 - 2x^2 - 3x + 7 + 9 - 2x = 4 - 2x^2.$$

Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину рівняння, а ті, що не містять змінної, – у праву. Матимемо:

$$\underline{7x} - \underline{\underline{2x^2}} - \underline{3x} - \underline{2x} + \underline{\underline{2x^2}} = 4 + 5 - 7 - 9;$$
$$2x = -7;$$
$$x = -3{,}5.$$

В і д п о в і д ь: $-3{,}5$.

Іноді виникає необхідність розв'язати зворотну задачу – записати многочлен у вигляді суми або різниці многочленів. У такому випадку доцільно використовувати правила взяття виразу в дужки, перед якими стоїть знак «плюс» або «мінус», які вивчалися у попередніх класах.

Приклад 2. Записати многочлен $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5$ у вигляді:
1) суми двох многочленів, один з яких містить змінну a, а другий її не містить;
2) різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну b, а другий її не містить.

Р о з в' я з а н н я.

1) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;
2) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

Як знайти суму многочленів? Як знайти різницю многочленів? Якими правилами користуються, якщо треба записати многочлен у вигляді суми чи різниці многочленів?

217. (*Усно*) Прочитайте многочлен, який одержимо після розкриття дужок:

1) $a + (b - 3)$; 2) $x + (3 - a + b)$;
3) $m - (n - 1)$; 4) $p - (-a^2 + 3)$.

218. Знайдіть суму многочленів:

1) $2x^2 + 3x^3 - 1$ та $5x^3 + 3x^2 + 7$;
2) $a^3 + 3a^2 + 1$; $2a^2 - 5$ та $6 - 5a^2$.

219. Знайдіть суму многочленів:

1) $3m^3 + 5m^2 - 7$ та $2m^3 + 6$;
2) $b^2 + 3b - 1$, $2b - 3b^2$ та $2b^2 + 7$.

220. Знайдіть різницю многочленів:

1) $4p^3 + 7p^2 - p$ та $2p^2 + p$; 2) $m^2 + 2m - 1$ та $m^3 + 2m - 1$.

221. Знайдіть різницю многочленів:

1) $2a^3 - 3a^2 + 7$ та $a^3 - 5a^2 - 8$;
2) $c^4 + c^3 - 2$ та $c^3 + 2c^2 - 2$.

222. Знайдіть суму і різницю виразів:

1) $x + y$ і $x - y$; 2) $x - y$ і $-x + y$;
3) $-x - y$ і $y - x$; 4) $x - y$ і $y - x$.

223. Знайдіть суму і різницю виразів:

1) $2a - b$ і $2a + b$; 2) $2a - b$ і $-2a + b$;
3) $-2a - b$ і $2a + b$; 4) $2a - b$ і $b - 2a$.

224. Знайдіть суму і різницю многочленів та зведіть до многочлена стандартного вигляду:

1) $3x^2 - 2x + 1$ і $3x^2 - 4$; 2) $2x + 1$ і $-3x^2 - 2x - 1$;
3) $a + 5b$ і $3a - 5b$; 4) $m^2 - 2mn - n^2$ і $m^2 + n^2$.

225. Запишіть суму і різницю першого і другого многочленів та зведіть її до многочлена стандартного вигляду:

1) $5y^2 + 2y - 10$ і $3y^2 - y + 7$;
2) $5m^3 - m + 3$ і $4m^2 + m - 4$;
3) $5p^2 - 2pq - 7q^2$ і $3p^2 + 2pq + 5q^2$.

226. Спростіть вираз:

1) $(1 + 2p) + (p^2 - p)$; 2) $(5a^2 + a^3) - (-a + 5a^2)$;
3) $(x^2 - 5x) + (5x - 13)$; 4) $(3b^3 - 5b^2) - (5 + 3b^3 - 2b^2)$.

227. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $(5ab^2 - 12ab - 7a^2b) - (15ab + 8a^2b)$;
2) $\left(\frac{3}{5}a^3b^2 - \frac{3}{4}ab^2\right) - \left(-\frac{5}{8}b^2a - \frac{7}{10}b^2a^3\right)$;
3) $(x + y - z) - (-2x + 3y - z) - (-5y + 4z + x)$;
4) $(2m - 3n) - (4m - 3mn + 3n^2) - (5mn - 5n^2 - 3n)$.

228. Спростіть вираз:

1) $(15x^2 - 3xy) - (12x^2 - 5xy + y^2)$;
2) $(5a^2b - 12ab + 14ab^2) - (-5ab + 14ab^2 - 7a^2b)$;
3) $(m + n - 2p) - (-2m + p - 3n) - (4n + 3m - 4p)$.

229. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x + 2x^2 - (2x^2 - 10) = 25$;
2) $5 - x^3 - (2x + 7 - x^3) = -8$.

230. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x^2 + 7x - (2x + 5x^2 - 8) = 8$;
2) $2 - 3x^3 - (5x - 3x^3) = -13$.

231. Подайте многочлен у вигляді суми двох многочленів, один з яких містить змінну x, а другий її не містить:

1) $xa + b - m - xb$; 2) $xa^2 - 17a + 5x + 10b$.

232. Запишіть многочлен $5x^2 - 9x^3 + 7x - x^4 - 1$ у вигляді суми двочлена і тричлена. Знайдіть два розв'язки задачі.

233. При якому значенні x:

1) значення різниці одночлена $5x$ і многочлена $3x - 5x^2 + 12$ дорівнює значенню многочлена $7x + 5x^2 - 18$;

2) значення різниці многочленів $5x^3 + 3x^2 - x$ і $2x^3 - 2x^2 + x$ дорівнює значенню многочлена $5x^2 + 3x^3 + 14$?

234. При якому значенні змінної y:

1) сума многочленів $2y^3 - 3y + y^2$ та $5y - 2y^3 - y^2 + 7$ дорівнює 19;

2) різниця двочлена $5y^2 - 7y$ і тричлена $2y^2 - 8y + 9$ дорівнює двочлену $3y^2 - 3y$?

235. Подайте многочлен у вигляді різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну y, а другий її не містить:

1) $-ya + yx + x - y - a + 1$;   2) $-p^2 + y^2 + 2p - 7y - 1$.

236. Який многочлен стандартного вигляду потрібно записати замість пропусків, щоб одержати тотожність:

1) $-(\dots) = 4p - q$;

2) $-(\dots) = 4m^2 - p^2 + 5$;

3) $(\dots) + 2m^2n - 5mn^2 = 7m^2 - 3mn^2$;

4) $7a^2b + 9a^3 + (\dots) = 8a^2b$;

5) $3 + 2a^2 - 5a + (\dots) = 9a^2 - 12$;

6) $(\dots) - (4x^2 - 2xy) = 5 + 5x^2 - 2xy$?

237. Знайдіть многочлен стандартного вигляду, підставивши який замість M, матимемо тотожність:

1) $-M = 5a - b^2 + 7$;

2) $M + (3a^2 - 2ab) = 5a^2 + 3ab - b^2$;

3) $M - (3mn - 4n^2) = m^2 - 4mn + n^2$;

4) $(7a^2 - b^2 - 9ba) - M = 0$.

238. Велосипедист був у дорозі 4 год. За першу годину він проїхав x км, а за кожну наступну – на 3 км більше, ніж за попередню. Яку відстань проїхав велосипедист:

1) за другу годину;

2) за третю годину;

3) за перші три години;

4) за весь час руху?

239. Робітник працював 5 год. За першу годину він виготовив a деталей, а за кожну наступну – на 2 деталі менше, ніж за попередню. Скільки деталей виготовив робітник:

1) за другу годину; 2) за третю годину;
3) за перші дві години; 4) за останні три години?

240. Доведіть тотожність:

1) $(x - y) + (y - p) - (x - p) = 0$;

2) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$.

241. Доведіть тотожність:

$(a^3 + a^2 - a) + (2a^2 - 5a + 3a^3) - (4a^3 - 6a + 2a^2) = a^2$.

242. Доведіть, що при будь-яких натуральних значеннях n значення виразу $(15 - 7n) - (7 - 11n)$ є кратним числу 4.

243. Доведіть, що при будь-яких натуральних значеннях m значення виразу $(m^2 - 4m + 1) - (m^2 - 9m - 14)$ ділиться на 5.

244. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{8}a^2b + \frac{3}{5}ab\right) - \left(\frac{7}{10}ab - \frac{3}{4}ba^2\right) - \left(\frac{7}{8}a^2b - \frac{1}{10}ab - 2\right)$$

не залежить від значення змінних.

245. Доведіть, що значення виразу

$(7x^5 - 4x^4 + x^3 - 8) - (3x^5 - 4x^4 + 4x^3) - (4x^5 - 3x^3 + 7)$

не залежить від значення змінної.

246. Знайдіть значення виразу:

1) $(b^2 + 3b - 8) - (7b^2 - 5b + 7) + (5b^2 - 8b + 10)$, якщо $b = -2$;

2) $17x^2 - (3x^2 - 2xy + 3y^2) - (14x^2 + 3xy - 4y^2)$, якщо $x = -0{,}1$, $y = 10$.

247. Знайдіть значення виразу:

1) $(m^2 - 2m - 8) - (0{,}1m^2 - 5m + 9) + (4m - 0{,}9m^2 + 5)$, якщо $m = \frac{1}{7}$;

2) $7a^2 - (3ab - 2a^2) + (4ab - 9a^2)$, якщо $a = -\frac{1}{8}$, $b = -32$.

248. Подайте многочлен $3m^2n - 5mn + 4n^2 - 9n - 7$ у вигляді різниці двох многочленів так, щоб усі члени обох многочленів мали додатні коефіцієнти.

249. Нехай $a = 7m^2 + 5mn - n^2$, $b = -6m^2 + 2mn + 3n^2$, $c = m^2 - 2n^2$. Підставте ці многочлени замість a, b, c у вираз і спростіть його:

1) $a + b + c$; 2) $a - b - c$.

250. Доведіть, що при будь-якому значенні x різниця многочленів $0{,}5x^4 + x^3 - 0{,}2x^2 - 5$ і $0{,}3x^4 + x^3 - 0{,}7x^2 - 9$ набуває додатного значення. Якого найменшого значення набуває ця різниця і при якому значенні x?

251. Доведіть, що сума:

1) трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;
2) чотирьох послідовних натуральних чисел при діленні на 4 дає в остачі 2.

252. Запис $\overline{xy}$ означає натуральне число, у якому x десятків і y одиниць. Доведіть, що

1) сума чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$ кратна числу 11;
2) різниця чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$, де $x > y$, кратна числу 9.

253. Запис $\overline{xyz}$ означає число, у якому x сотень, y десятків і z одиниць. Подайте у вигляді многочлена:

1) $\overline{xyz}$; 2) $\overline{zyx}$; 3) $\overline{xyz} + \overline{zy}$; 4) $\overline{yxz} - \overline{yx}$.

Вправи для повторення

254. Обчисліть значення виразу:
$(0{,}018 + 0{,}982) : (4 \cdot 0{,}5 - 0{,}2)$.

255. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-8x \cdot 1{,}5y$, якщо $x = \frac{4}{7}$, $y = -1\frac{3}{4}$;

2) $-2a \cdot (-3{,}5b) \cdot 5c$, якщо $a = -1$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{7}$.

256. Подайте вираз 2^{60} у вигляді степеня з основою:

1) 4; 2) 8; 3) 16; 4) 32.

Цікаві задачі для учнів неледачих

257. Знайдіть цифри a і b, якщо число $\overline{9a6b2}$ кратне числу 36. Укажіть усі можливі розв'язки.

§ 9. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Помножимо одночлен $5x$ на многочлен $3x - 7$, використовуючи розподільну властивість множення:

$$5x(3x - 7) = 5x \cdot 3x - 5x \cdot 7 = 15x^2 - 35x.$$

Отже, добутком одночлена $5x$ і многочлена $3x - 7$ є многочлен $15x^2 - 35x$, який одержали, помноживши одночлен на кожний член многочлена і додавши знайдені результати. Маємо *правило множення одночлена на многочлен*:

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

Добуток будь-якого одночлена на будь-який многочлен завжди можна подати у вигляді многочлена.

Приклад 1. Виконати множення: $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2)$.

Р о з в' я з а н н я.

$-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -3ab \cdot 5a^2 - 3ab \cdot (-2ab) - 3ab \cdot b^2 =$
$= -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Записати це множення можна коротше, пропустивши проміжні результати:

$$-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3.$$

Приклад 2. Спростити вираз: $5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m)$.

Р о з в' я з а н н я.

$5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m) = \underline{5m^3} - \underline{\underline{10m}} - \underline{2m^3} + \underline{\underline{10m}} = 3m^3.$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-14}{12}.$$

Р о з в' я з а н н я. Помножимо обидві частини рівняння на найменший спільний знаменник дробів, тобто на 12:

$$12\left(\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4}\right) = 12 \cdot \frac{x-14}{12}.$$

Маємо:

$$\frac{12\cdot(2x-1)}{3}-\frac{12\cdot(3x+2)}{4}=\frac{12\cdot(x-14)}{12};$$

$$4(2x-1)-3(3x+2)=x-14;$$
$$8x-4-9x-6=x-14;$$
$$8x-9x-x=-14+4+6;$$
$$-2x=-4;$$
$$x=2.$$

В і д п о в і д ь: 2.

Сформулюйте правило множення одночлена на многочлен.

258. (*Усно*) Виконайте множення:

1) $m(a-b)$; 2) $-p(4+a)$;
3) $a(b+c-4)$; 4) $-a(b-c+2)$.

259. Виконайте множення:

1) $a(b-2)$; 2) $m(a+c)$;
3) $p(a-b-3)$; 4) $-b(a-c+3)$.

260. Виконайте множення одночлена на многочлен:

1) $7a^2(3-a)$; 2) $-5x^2(x^3+4x)$;
3) $-3c^3(c-2c^2)$; 4) $2a^4(a^5-a^3-1)$;
5) $(3x^2-5x-3)\cdot 2x$; 6) $(c^3+c-4)\cdot(-3c)$.

261. Перетворіть добуток на многочлен:

1) $4xy(x^2-2xy-y^2)$;
2) $-a^2b(ab^2-b^2+a^2)$;
3) $(2mn-3m^2-5n^2)\cdot(-4m^2)$;
4) $(-2x^2y+3xy-x^2)\cdot xy^2$;
5) $(2{,}8a^2b-3{,}7a^3b-0{,}8b)\cdot 10ab^2$;
6) $-1{,}8a^2b^6(5a^2b-1{,}5a-2b^3)$.

262. Подайте у вигляді многочлена:

1) $4a(a^2-2a+3)$;
2) $-3b^2(4b^3-2b^2+3b-8)$;
3) $(3x^2-4x+12)\cdot(-0{,}1x^3)$;
4) $(p^2-9p^3+7p-1)\cdot 3p^4$;
5) $7ab(2a^2b-3ab^2-3a^3)$;

6) $-6m^2n(m^2n - 3mn^2 - 4n^3)$;
7) $(9a^2b - 8ab^3 - a^2b^2) \cdot (-3a^2b^3)$;
8) $(p^2q^3 - 2pq^4 + 3p^3) \cdot 5p^3q^2$.

263. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{7}a^2b(1,4a^2 - 2,1b^3)$;
2) $-\frac{2}{3}x^2y^3\left(1,2y^5 - \frac{9}{10}xy\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{5}mn^2 - 1\frac{1}{15}m^2\right) \cdot \left(-\frac{5}{6}m^2n\right)$;
4) $\left(1\frac{1}{4}m - \frac{5}{6}n\right) \cdot 2\frac{2}{5}m^2n^7$.

264. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{4}m^2n(2,4mn - 2,8m^2)$;
2) $-\frac{2}{5}ab^3\left(1,5ab - \frac{5}{6}b^2\right)$;
3) $\left(1\frac{1}{2}x^2y - \frac{9}{10}xy^4\right) \cdot \frac{2}{3}xy^3$;
4) $\left(1,5a - \frac{4}{7}b\right) \cdot \left(-\frac{1}{14}a^2b^5\right)$.

265. Подайте у вигляді многочлена:

1) $5(x - 3) - 2(x - 3)$;
2) $5(7a - 1) - 7(5a + 3)$;
3) $2b(b - 3) - 5b(b + 7)$;
4) $7y^2(3y - 2) + 4y^2(y + 5)$.

266. Спростіть вираз:

1) $5(3 - 2a) + 7(3a - 1)$;
2) $3(2x - 8) - 3(2x - 5)$;
3) $3m(m - 2) - 5m(7 - m)$;
4) $2a^2(3a - 5) + 4a^2(a + 3)$.

267. Перетворіть вираз на многочлен:

1) $5m(m - n) + 3n(n - m)$;
2) $2a(2b - 3a) - 3a(5b - 7a)$;
3) $a(3a^2 - 2b) - b(5a^2 - 2a)$;
4) $0,2mn(m^2 - n^2 + 3) - 0,5m(nm^2 - n^3)$.

268. Виконайте дії:

1) $3a(a - b) + 5b(a + b)$;
2) $3y(x - y) + y(2y - 3x)$;
3) $p(p^2 - 2a) - a(a^2 - 2p)$;
4) $3xy(x^2 - y^2 + 7) - 5xy(y^2 + x^2)$.

269. Розв’яжіть рівняння:

1) $6 + 2(5x + 4) = 24$;
2) $3(5x - 1) = 4(4x - 8)$;
3) $7 - 4(y - 1) = (3y - 2) \cdot (-2)$;
4) $3(y - 2) - 5(y + 7) = -7(y - 1)$.

270. Розв'яжіть рівняння:

1) $5(2x - 1) = 3(4x + 5)$; 2) $9 - 5(y + 2) = (7y - 5) \cdot (-3)$.

271. Знайдіть корінь рівняння:

1) $x(x - 3) - 9 = 12 + x^2$; 2) $3x - 2x^2 = 2x(5 - x) + 14$.

272. Знайдіть корінь рівняння:

1) $7 - x(x - 2) = 5 - x^2$; 2) $3x(x - 5) = 3x^2 - 5x + 20$.

273. Запишіть замість зірочки такий одночлен, щоб виконувалася рівність:

1) $(a + b) \cdot * = am + bm$;
2) $* \cdot (x - y) = -nx + ny$;
3) $* \cdot (a - b + c) = ax^2 - bx^2 + cx^2$;
4) $* \cdot (c - n + p) = -abc + abn - abp$;
5) $* \cdot (x^2 - xy) = x^2y^2 - xy^3$;
6) $(p - 1) \cdot * = p^2q^2 - pq^2$.

274. Доведіть, що при будь-якому значенні a вираз

$$a(3a + 1) - a^2(a + 2) + (a^3 - a^2) - (a + 1)$$

набуває одного й того самого значення.

275. Доведіть, що значення виразу

$$x(5x^2 - x + 2) - (5x - 2 + 4x^3) - x(x^2 - x - 3)$$

не залежить від значення змінної.

276. Доведіть, що вираз тотожно дорівнює нулю:

1) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$;
2) $a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a)$.

277. Перетворіть вираз на многочлен стандартного вигляду:

1) $-7a^5b(2b^4 + ab^5 - 3a^2b^6 + a^3b^7)$;
2) $(3x^3 + 5x^2 - 2a - 3a^2)xay$;
3) $-4pm^3(m^4 - 2p^3m + 7p^6m^7 + 11p^7m^3)$;
4) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^9 + \frac{1}{6}ab^7 - \frac{1}{3}a^3b^6\right)(-12a^3b^7)$.

278. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної a вираз

$2a^2(a - 5) - a(-6a + 2a^2 + 3a^3) - 4$ набуває від'ємних значень.

279. Доведіть, що при будь-якому значенні змінної m вираз $5(m^2 - 3m + 1) - 3m(m - 5)$ набуває лише додатних значень.

280. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $4a - 2(5a - 1) + (8a - 2)$, якщо $a = -3{,}5$;

2) $10(2 - 3x) + 12x - 9(x + 1)$, якщо $x = -\dfrac{1}{27}$;

3) $a(3a - 4b) - b(3b - 4a)$, якщо $a = -5$, $b = 5$;

4) $3xy(5x^2 - y^2) - 5xy(3x^2 - y^2)$, якщо $x = \dfrac{1}{8}$, $y = -2$.

281. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $7a(2a - 0{,}1) - 0{,}1a(10a - 7)$, якщо $a = \dfrac{1}{13}$;

2) $4x(2x - 5y) - 2y(4y - 10x)$, якщо $x = -15$, $y = 15$.

282. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $3a(5a^2 - 3ab + ab^3 - b^2) \cdot b$;

2) $-xy \cdot (x^2y - 2x^2y^2 + 3xy^3 + x^3) \cdot x^2$.

283. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{5x-9}{4} + \dfrac{5x-7}{4} = 1$;   2) $\dfrac{3x-1}{14} - \dfrac{x}{7} = -2$;

3) $\dfrac{x-6}{3} + \dfrac{2x+3}{3} = 2x$;   4) $\dfrac{2-x}{5} - \dfrac{x}{15} = \dfrac{1}{3}$.

284. Розв'яжіть рівняння:

1) $\dfrac{7x-3}{6} - \dfrac{5x+1}{2} = 0$;   2) $\dfrac{x-3}{5} - \dfrac{x}{4} = 1$;

3) $\dfrac{4x+1}{6} + \dfrac{10x+1}{6} = x$;   4) $\dfrac{x+2}{15} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x}{5}$.

285. При якому значенні змінної:

1) значення виразу $2(3y + 1)$ у 4 рази більше за значення виразу $3y - 2$;

2) добуток виразів $3x$ і $2x + 1$ дорівнює сумі виразів $x(4x - 1)$ і $2(x^2 - 3)$?

286. Для виготовлення одного тістечка потрібно на 4 г цукру більше, ніж для виготовлення одного пиріжка або одного пончика. За день у кондитерському цеху було виготовлено 80 тістечок, 50 пончиків і 50 пиріжків. При цьому на всі тістечка пішло на 80 г цукру більше, ніж на всі пончики і пиріжки разом. Скільки грамів цукру йде на виготовлення одного тістечка?

287. За 8 олівців, 4 ручки і блокнот заплатили 26 грн 50 коп. Олівець на 1 грн 75 коп. дешевший за ручку і на 3 грн 25 коп. дешевший за блокнот. Скільки коштують окремо олівець, ручка і блокнот?

288. Човен плив 3,5 год за течією річки і 2,5 год проти течії. Відстань, яку він проплив за течією річки, на 30 км більша за відстань, яку він проплив проти течії. Знайдіть швидкість човна, якщо швидкість течії 2 км/год.

289. Одна котушка бавовняних ниток коштує 2 грн 70 коп., а льняних – 3 грн 25 коп. Бабуся для плетіння скатертини придбала бавовняних ниток на 6 котушок більше, ніж льняних, витративши на всю покупку 87 грн 60 коп. Скільки котушок бавовняних і скільки котушок льняних ниток придбала бабуся?

290. Якими одночленами треба замінити зірочки, щоб одержати тотожність:

1) $5ax^2 \cdot (* + *) = 5ax^3 + 35ax^2$;
2) $(9a^2 + *) \cdot 3a = * + 18a^3$;
3) $(* - 4mc^2) \cdot * = 3m^3c^2 - 12m^2c^4$;
4) $(* - *) \cdot x^2y^3 = 5x^2y^3 - 7x^2y^4$?

291. Які одночлени треба вписати в клітинки, щоб одержати тотожність:

1) $3a^2(\square - \square) = 9a^5 - 12a^2$;
2) $(\square + \square) \cdot 5ab^2 = 5ab^2 + 10a^2b^3$;
3) $(\square - 2m^2a) \cdot 7m = 14m^2 - \square$;
4) $(7x^2a - 9xa^2) \cdot \square = 14x^3a^5 - \square$?

4 **292.** Спростіть вираз (n – натуральне число):

1) $x^{n+3}(x^{n+4} - x) - x^{2n+7}$;
2) $y^n(y^{n+2} - y^n - y^2) - y^2(y^{2n} - y^n)$;
3) $z^n(z^2 - 1) - z^2(z^n + 2) - 2(z^n - z^2)$.

Вправи для повторення

293. У яких координатних чвертях розташовуються точки $A(-5; -7)$, $B(4; -8)$, $C(1; 17)$, $D(-9; 8)$?

294. Спростіть: 1) $(-3a^2b^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}ab^2\right)^3$; 2) $(0{,}1mn^7)^2 \cdot (-10m^2n^3)^3$.

295. Використовуючи властивості степенів, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{24^{17} \cdot 6^{16}}{48^{16} \cdot 3^{17}}$; 2) $\frac{35^9 \cdot 2^7}{5^7 \cdot 14^8}$.

Цікаві задачі для учнів неледачих

296. Відомо, що при деяких натуральних значеннях a і b значення виразу $6a + b$ кратне числу 7. Доведіть, що при тих самих значеннях a і b значення виразу $6b + a$ також кратне числу 7.

§ 10. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ

У 6 класі ми розкладали складені числа на прості множники, тобто подавали натуральні числа у вигляді добутку. Наприклад, $12 = 2^2 \cdot 3$; $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ тощо.

Подати у вигляді добутку можна і деякі многочлени. Це означає, що ці многочлени можна розкладати на множники. Наприклад, $5x - 5y = 5(x - y)$; $a^3 + 3a^2 = a^2(a + 3)$ тощо.

Розкласти многочлен на множники **означає подати його у вигляді добутку одночлена на многочлен або добутку кількох многочленів так, щоб цей добуток був тотожно рівним даному многочлену.**

Розглянемо один із способів розкладання многочленів на множники – ***винесення спільного множника за дужки***. Одним з відомих нам прикладів такого розкладання є розподільна властивість множення $a(b + c) = ab + ac$, якщо її записати у зворотному порядку: $ab + ac = a(b + c)$. Це означає, що многочлен $ab + ac$ розклали на два множники a і $b + c$.

ЗМІСТ

Розділ 2.
ФУНКЦІЇ

Розділ 3.
ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ